四元数まとめ資料

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2022 年 8 月 27 日

1 まえがき

四元数 (Quaternion) は 1843 年にアイルランドの数学者 William Rowan Hamilton(1805-1865) によって発見された [1].

本資料は，主に飛翔体の姿勢計算を行う事を目的として四元数の基本的な演算についてまとめる．工学的な応用を前提に書いているので，必ずしも数学的に厳密な表現ではないことに注意されたい．

2 座標系

本資料では，以下の二つの座標系を取り扱う．

- 基準座標系 (Reference frame)
- 機体座標系 (Body frame)

基準座標系は移動や回転の基準となる座標系であり，地表や地球中心等に固定される．機体座標系は原点が航空機等の重心位置に固定され機体とともに移動・回転する動座標系である [2]．また，両座標系ともに上向きを正とした右手直交座標系とする．

3 ベクトルの定義と演算

ベクトルを表す変数は太字の斜体とし，その成分を下添字 $1, 2, 3$ で表して以下のように定義する．

$$\boldsymbol{a} \equiv a_1 i + a_2 j + a_3 k \tag{1}$$
$$= [a_1,\, a_2,\, a_3] \tag{2}$$

ここで a_1, a_2, a_3 は実数であり，i, j, k は後述する四元数の基底である．

3.1 内積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積はドットで表す．

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [a_1,\, a_2,\, a_3] \cdot [b_1,\, b_2,\, b_3] \tag{3}$$
$$\equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{4}$$

3.2 外積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積はクロスで表す．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [a_1,\, a_2,\, a_3] \times [b_1,\, b_2,\, b_3] \tag{5}$$
$$\equiv [a_2 b_3 - a_3 b_2,\, a_3 b_1 - a_1 b_3,\, a_1 b_2 - a_2 b_1] \tag{6}$$

4 四元数の定義

四元数を表す変数は上にチルダを付けて表記し，以下のように定義する．

$$\tilde{q} \equiv q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{7}$$
$$= (q_0,\, [q_1,\, q_2,\, q_3]) \tag{8}$$
$$= q_0 + \boldsymbol{q} \tag{9}$$
$$= \mathsf{S}\tilde{q} + \mathsf{V}\tilde{q} \tag{10}$$

ここで q_0, q_1, q_2, q_3 は実数である．また，$1, i, j, k$ は四元数の基底と呼ばれ，以下の等式を満たす．

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{11}$$

上式より基底間の積の組み合わせを導出することができ，一例として $ijk = -1$ の両辺に右から k を掛ければ

$$ijk^2 = -k \tag{12}$$
$$ij = k \tag{13}$$

を得る．他の積も同じように得られて，結果的に

$$\left.\begin{aligned} ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

が可能な全ての積を列挙したものとなる．以上からわかるように基底間の積は非可換である．

また，式 (9) のように表記した場合に q_0 をスカラー部，$\boldsymbol{q}$ をベクトル部と呼び，式 (10) における S と V はそれぞれ $\tilde{q}$ からスカラー部とベクトル部を取り出す演算子である．本資料ではこの演算子を積極的に使用しないが，式表現の自由度が増すので知っておくと後々役に立つだろう．

5　実四元数 (Real Quaternion)

スカラー部がゼロではなく，ベクトル部の成分が全てゼロである四元数を実四元数という．

$$\tilde{q}_{\mathrm{real}} = (q_0,\, [0,\, 0,\, 0]) \tag{15}$$

6　純虚四元数 (Pure Quaternion)

スカラー部がゼロであり，ベクトル部の少なくとも一つの成分がゼロではない四元数を純虚四元数という．

$$\tilde{q}_{\mathrm{pure}} = (0,\, [q_1,\, q_2,\, q_3]) \tag{16}$$

7　加法・減法

四元数の加法と減法は基底ごとに括って計算すれば良い．

$$\tilde{a} \pm \tilde{b} = (a_0,\, [a_1,\, a_2,\, a_3]) \pm (b_0,\, [b_1,\, b_2,\, b_3]) \tag{17}$$
$$= (a_0 \pm b_0,\, [a_1 \pm b_1,\, a_2 \pm b_2,\, a_3 \pm b_3]) \tag{18}$$

8　ハミルトン積

ハミルトン積とは四元数同士の積のことであり，本資料では特別な記号は用いずに $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ の積を $\tilde{a}\tilde{b}$ と表記する．この積は非可換（$\tilde{a}\tilde{b} \neq \tilde{b}\tilde{a}$）であるが結合法則を満たし，任意の四元数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ に関して

$$\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = (\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c}) \tag{19}$$

が成り立つ．また，ノルム（定義は後述）は乗法的であり

$$\|\tilde{a}\tilde{b}\| = \|\tilde{a}\|\|\tilde{b}\| \tag{20}$$

となる．

二つの四元数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ のハミルトン積は，基底間の積と分配法則に従って以下のように導出できる．

まず，分配法則に従って単純に展開すると

$$\tilde{a}\tilde{b} = (a_0 + \boldsymbol{a})(b_0 + \boldsymbol{b}) \tag{21}$$
$$= a_0 b_0 + a_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \tag{22}$$
$$= a_0 b_0 + a_0(b_1 i + b_2 j + b_3 k) + b_0(a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \tag{23}$$
$$\begin{aligned} &= a_0 b_0 \\ &\quad + (a_0 b_1 i + a_0 b_2 j + a_0 b_3 k) \\ &\quad + (b_0 a_1 i + b_0 a_2 j + b_0 a_3 k) \\ &\quad + (a_1 b_1 i^2 + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 j^2 \\ &\qquad + a_2 b_3 jk + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 k^2) \end{aligned} \tag{24}$$

となる．これを式 (11) の規則に従って整理すると

$$\begin{aligned} \tilde{a}\tilde{b} = &(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) \\ &+ (a_0 b_1 + b_0 a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i \\ &+ (a_0 b_2 + b_0 a_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3) j \\ &+ (a_0 b_3 + b_0 a_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{aligned} \tag{25}$$

となり，$\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ のハミルトン積が得られる．

ここで，上式を注意深く観察するとベクトル部同士の積に関して以下の関係が成り立っていることが確認できる．

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{26}$$

これこそがハミルトンの探し求めていたベクトルの乗算法則であり，3 次元ベクトルの内積と外積はここから定義された [3]．この関係を用いるとハミルトン積は以下のように簡潔な形で表せるようになる．

$$\tilde{a}\tilde{b} = a_0 b_0 + a_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{27}$$

式 (26) の関係を使わずに $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ のまま扱っても良いが，ベクトルの内積と外積はその性質が広く知られているので多くの場合はこの形で書いた方が扱いやすい．

以上より，四元数同士の積は四元数となることがわかった．式 (26) ではベクトル同士の積が四元数となっているように見えるが，四元数のベクトル部は純虚四元数とみなせるのでこれも四元数同士の積である．また，除法に関しては後述する逆四元数との積をとることで計算できるので [4]，四元数は四則について閉じているといえる．

8.1　ハミルトン積が可換になる場合

上述のようにハミルトン積は基本的に非可換であるが，特定の条件においては可換となる．

式 (27) を見れば明らかなように，そもそもハミルトン積が非可換なのは式中に外積の項が含まれているためである．つまり，二つの四元数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ を考えた際に

$$\mathsf{V}\tilde{a} \parallel \mathsf{V}\tilde{b} \tag{28}$$

であれば，外積の項が消えて $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ の積は可換となる．

9　共役四元数

四元数 $\tilde{a} = a_0 + \boldsymbol{a}$ のベクトル部の符号を反転したものを共役四元数といい，アスタリスクを付けて以下のように定義する．

$$\tilde{a}^* \equiv a_0 - \boldsymbol{a} \tag{29}$$

この定義より，二つの共役四元数の加法・減法に関して

$$\tilde{a}^* \pm \tilde{b}^* = (\tilde{a} \pm \tilde{b})^* \tag{30}$$

が成り立つことは明らかである．また，$\tilde{b} = b_0 + \boldsymbol{b}$ とした場合，まずベクトル部同士の積に関して以下の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})^* \tag{31}$$

この関係より，四元数同士の積に関して

$$\tilde{a}^*\tilde{b}^* = (\tilde{b}\tilde{a})^* \tag{32}$$

が成り立つ．これは n 個の四元数の積に一般化できて

$$\tilde{a}_1^*\tilde{a}_2^* \cdots \tilde{a}_n^* = (\tilde{a}_n \cdots \tilde{a}_2\tilde{a}_1)^* \tag{33}$$

が成り立つ．

10　ノルム

共役四元数を用いると，四元数 $\tilde{q}$ のノルムを定義できる．

$$\|\tilde{q}\| \equiv \sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*} = \sqrt{\tilde{q}^*\tilde{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{34}$$

また，上式において $\tilde{q}$ を純虚四元数（$\tilde{q} = \boldsymbol{q}$）とするとベクトルのノルムを定義できる．

$$\|\boldsymbol{q}\| \equiv \sqrt{\boldsymbol{q}(-\boldsymbol{q})} = \sqrt{(-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{35}$$

11　単位四元数 (Unit Quaternion)

単位四元数とはノルムが 1 の四元数のことである．ノルムがゼロでない四元数 $\tilde{q}$ をそのノルムで割ると単位四元数

$$\mathsf{U}\tilde{q} \equiv \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} \tag{36}$$

が得られ，この処理を四元数の正規化という．ただし，U は $\tilde{q}$ を正規化する演算子である．

また，後述する回転を表す単位四元数のことを Versor（ベルソル，ベルサー）と呼ぶことがある．ラテン語で「回転させる」を意味する Versare に由来する単語とされており，ハミルトンによって四元数の表現に導入された [5].

12　逆四元数

逆四元数とはノルムがゼロでない四元数 $\tilde{q}$ との積に関して

$$\tilde{q}\tilde{q}^{-1} = \tilde{q}^{-1}\tilde{q} = 1 \tag{37}$$

を満たす $\tilde{q}^{-1}$ のことであり，以下のように定義される．

$$\tilde{q}^{-1} \equiv \frac{\tilde{q}^*}{\|\tilde{q}\|^2} \tag{38}$$

この定義と式 (34) より式 (37) が成り立つことが確認でき，$\tilde{q}$ が単位四元数の場合には $\tilde{q}^{-1} = \tilde{q}^*$ となる．また，n 個の逆四元数の積に関して以下の関係が成り立つ．

$$\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-1} \cdots \tilde{q}_n^{-1} = (\tilde{q}_n \cdots \tilde{q}_2\tilde{q}_1)^{-1} \tag{39}$$

13　内積

四元数の内積もベクトルの内積と同じように各要素を掛け合わせて総和をとったものであり，以下のように定義される．

$$\begin{aligned}\tilde{a}\cdot\tilde{b} &= (a_0,\,[a_1,\,a_2,\,a_3])\cdot(b_0,\,[b_1,\,b_2,\,b_3]) &(40)\\ &\equiv a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &(41)\end{aligned}$$

また，4 次元なので図形的にイメージすることは難しいが，$\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ のなす角を Ω とすると

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \|\tilde{a}\|\|\tilde{b}\|\cos\Omega \tag{42}$$

が成り立つ．

14　回転を表す四元数 (Versor)

3 次元空間における物体の回転は一つの回転軸とその周りの回転角によって表すことができ，これをオイラーの定理という [6].

四元数の場合には，回転軸を表す単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($\|\boldsymbol{n}\| = 1$) とその周りの回転角 $\theta\,[\mathrm{rad}]$ を用いて以下の形で表すことができる．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \quad (-2\pi \le \theta \le 2\pi) \tag{43}$$

上式は一見すると 4 自由度に見えるが，この形で書くと必ず単位四元数となるため $\tilde{q}$ の自由度は 3 である．

上記の四元数が表す回転をベクトルに作用させることを考えると，これはベクトルと座標系の関係に着目して

(i) 座標系を固定してベクトルを回転させる場合
(ii) ベクトルを固定して座標系を回転させる場合

という二種類の回転に分けられる [7]．初期状態のベクトルを $\boldsymbol{r}$ として上述の回転を式で表すと，それぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\text{(i)} \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} = \tilde{q}\,\boldsymbol{r}\,\tilde{q}^{-1} \qquad \text{（ベクトル回転）} &(44)\\ &\text{(ii)} \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{ii}} = \tilde{q}^{-1}\,\boldsymbol{r}\,\tilde{q} \qquad \text{（座標系回転）} &(45)\end{aligned}$$

この二つの式は展開して整理するとスカラー部が消えるため，左辺がベクトル部のみ（純虚四元数）となっている．また，$\|\tilde{q}\| = 1$ かつハミルトン積はノルムに関して乗法的であるので，回転を作用させても $\boldsymbol{r}$ のノルムは変化しない．

二種類の回転について，(i) と (ii) の関係は直感的にはわかりにくいかもしれないが，ベクトルの視点で考えるとこれらは互いに逆回転となっている．試しに，ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して (i) と (ii) の両方の形で回転を作用させると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\text{i \& ii}} &= \tilde{q}^{-1}(\tilde{q}\boldsymbol{r}\tilde{q}^{-1})\tilde{q} && (46)\\ &= (\tilde{q}^{-1}\tilde{q})\boldsymbol{r}(\tilde{q}^{-1}\tilde{q}) && (47)\\ &= \boldsymbol{r} && (48)\end{aligned}$$

となり，互いに逆回転の関係にあるので回転が打ち消されていることが確認できる．

単位四元数の場合には $\tilde{q}^{-1} = \tilde{q}^*$ となるので，これ以降の式は見やすさのために共役四元数を用いた表記とすることがある．

15 回転の合成

ここでは，複数の四元数が表す一連の回転を合成する（一つの四元数にまとめる）ことができないかを考える．

15.1 ベクトル回転の場合

ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して，$\tilde{q}_1$ の表す回転をベクトル回転の形で作用させる．回転後のベクトルを $\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1}$ のように添字で表すと，式 (44) より

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1} = \tilde{q}_1\boldsymbol{r}\tilde{q}_1^* \tag{49}$$

となる．さらに，$\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1}$ に対して $\tilde{q}_2$ によるベクトル回転を作用させると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2} &= \tilde{q}_2\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1}\tilde{q}_2^* && (50)\\ &= \tilde{q}_2(\tilde{q}_1\boldsymbol{r}\tilde{q}_1^*)\tilde{q}_2^* && (51)\end{aligned}$$

ここで，式 (33) の性質と結合法則より上式は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2} &= (\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\boldsymbol{r}(\tilde{q}_1^*\tilde{q}_2^*) && (52)\\ &= (\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\boldsymbol{r}(\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* && (53)\end{aligned}$$

と変形でき，一般化すると以下のようになる．

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2\cdots\tilde{q}_n} = (\tilde{q}_n\cdots\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\boldsymbol{r}(\tilde{q}_n\cdots\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* \tag{54}$$

つまり，四元数同士の積は回転の合成となっており，複数の四元数が表す回転を一つの四元数で表すことができる．

例えば，計算ステップ n において四元数 $\tilde{q}_n$ があり，その後 1 ステップの間に $\Delta\tilde{q}$ だけ変化したとすると，計算ステップ $n+1$ における四元数は

$$\tilde{q}_{n+1} = \Delta\tilde{q}\tilde{q}_n \tag{55}$$

となる．

15.2 座標系回転の場合

ベクトル回転の場合と同様に考える．ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して $\tilde{q}_1$，$\tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n$ を座標系回転の形で作用させると

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2\cdots\tilde{q}_n} = (\tilde{q}_1\tilde{q}_2\cdots\tilde{q}_n)^*\boldsymbol{r}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2\cdots\tilde{q}_n) \tag{56}$$

となり，計算ステップ n に対しては以下のようになる．

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n\Delta\tilde{q} \tag{57}$$

以上のように，回転の合成とは共役四元数の積の性質を用いて式 (44) と式 (45) から導かれるものであり，合成した後に二種類の回転のうちどちらを作用させるかによって合成する際の積の順序が変化する．仮に，$\Delta\tilde{q}\tilde{q}_n$ の順序で合成した後に $\tilde{q}^*\boldsymbol{r}\tilde{q}$ の形で回転を作用させると，回転順序が逆かつそれぞれの回転方向も逆となり，一般的に期待される結果は得られない．このことは式 (33) より確認できる．

16 恒等四元数 (Identity Quaternion)

式 (43) より，軸回りの回転角 θ がゼロのときには

$$\tilde{q}_{\text{identity}} = (1,\ [0,\ 0,\ 0]) \tag{58}$$

となり，この四元数による演算は恒等写像となる（回転を与えない）ことから恒等四元数と呼ばれる．例えば，飛翔体の初期姿勢を表す際には恒等四元数を用いることがある．

17 平方根

四元数 $\tilde{q} = q_0 + \boldsymbol{q}$ の平方根（$x^2 = \tilde{q}$ を満たす x）は

$$\sqrt{\tilde{q}} \equiv \pm\left(\sqrt{\frac{\|\tilde{q}\| + q_0}{2}} + \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|}\sqrt{\frac{\|\tilde{q}\| - q_0}{2}}\right) \tag{59}$$

である．

18 指数函数

四元数 $\tilde{q} = q_0 + \boldsymbol{q}$ に関して，ネイピア数 $e\,(= 2.71828...)$ の四元数乗冪は

$$\begin{aligned}\exp(\tilde{q}) &= \exp(q_0 + \boldsymbol{q}) && (60)\\ &= \exp(q_0)\exp(\boldsymbol{q}) && (61)\\ &\equiv e^{q_0}\left(\cos\|\boldsymbol{q}\| + \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|}\sin\|\boldsymbol{q}\|\right) && (62)\end{aligned}$$

である．

19　対数函数

四元数 $\tilde{q} = q_0 + \boldsymbol{q}$ に関して，対数函数 $\ln(\tilde{q})$ は指数函数 $\exp(\tilde{q})$ の逆函数であり

$$\ln(\tilde{q}) \equiv \ln \|\tilde{q}\| + \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|} \arccos \frac{q_0}{\|\tilde{q}\|} \tag{63}$$

として与えられる．

20　冪函数

四元数 $\tilde{q} = \|\tilde{q}\|(\cos\Omega + \boldsymbol{n}\sin\Omega)$ に関して，底 $\tilde{q}$ および冪指数 t を持つ冪は

$$\tilde{q}^{\,t} \equiv \|\tilde{q}\|^t \{\cos(t\Omega) + \boldsymbol{n}\sin(t\Omega)\} \tag{64}$$

$$= \|\tilde{q}\|^t \exp(\boldsymbol{n}\, t\Omega) \tag{65}$$

である．

21　回転角と回転軸を取り出す

14 章で述べた回転を表す四元数 $\tilde{q}$ から回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ と回転角 $\theta\,[\mathrm{rad}]$ を取り出すことを考える．

ここで，$\tilde{q}, \boldsymbol{n}, \theta$ の関係は式 (43) のように表されるので，回転角 θ はスカラー部を比較して以下のように求まる．

$$\theta = 2\arccos q_0 \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{66}$$

もしくは，$\tan x = \sin x / \cos x$ の関係より

$$\theta = 2\arctan \frac{\|\boldsymbol{q}\|}{q_0} \quad (-\pi < \theta < \pi) \tag{67}$$

のように求めることもできる．ただし，この式ではゼロ除算が起こる可能性があるため，それが気になるようであれば以下の式を使うと良いだろう．

$$\theta = \begin{cases} +2\arcsin \|\boldsymbol{q}\| & (q_0 \ge 0) \\ -2\arcsin \|\boldsymbol{q}\| & (q_0 < 0) \end{cases} \tag{68}$$

上式における θ の範囲は $-\pi < \theta \le \pi$ である．

回転軸 $\boldsymbol{n}$ を求める際は単にベクトル部を正規化して

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|} \tag{69}$$

$$= \frac{\boldsymbol{q}}{\sqrt{1 - {q_0}^2}} \quad (\because \|\tilde{q}\| = 1) \tag{70}$$

とすれば良い．

22　ベクトル移動

位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ の位置に移動（回転）させる四元数 $\tilde{q}$ を求める．もう少し厳密にいえば，これは $\tilde{q}\boldsymbol{a}\tilde{q}^*$ と $\boldsymbol{b}$ が平行かつ向きが同じになるような $\tilde{q}$ を求める問題であり，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ である場合には $\boldsymbol{b} = \tilde{q}\boldsymbol{a}\tilde{q}^*$ が成り立つ．

まず $\tilde{q}$ の回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ について考えると，最短経路で移動させる場合，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交かつノルムが 1 であるので

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|} \tag{71}$$

となる．また，軸周りの回転角 θ は内積の幾何学性より

$$\theta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right) \tag{72}$$

であるので，目的の四元数 $\tilde{q}$ は以下のように与えられる．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{73}$$

23　四元数の補間

回転を表す二つの単位四元数 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ が与えられたとき，以下に述べる Slerp ないし Lerp を用いることで両者間を補間することができる．ここでは，$\tilde{q}_1$ から $\tilde{q}_2$ までの経路を補間する四元数 $\tilde{q}$ を，補間パラメータ t $(0 \le t \le 1)$ を用いて $\tilde{q} = \mathrm{Slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t)$ や $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ のように表記する．

23.1　Slerp (Spherical linear interpolation)

$\tilde{q}_1$ と $\tilde{q}_2$ は共に単位四元数であるので，これらは常に 4 次元空間における半径 1 の超球面上に存在している．Slerp では $\tilde{q}$ が超球面上を通るように補間を行い，t を一定の割合で変化させた際に角速度が一定となる [8]．

$\tilde{q}_1$ と $\tilde{q}_2$ がなす角を $\Omega\,[\mathrm{rad}]$ とすると，これは式 (42) より以下のように求められる．

$$\Omega = \arccos(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2) \tag{74}$$

この角度 Ω を用いて，Slerp は以下のように定義される．

$$\mathrm{Slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) \equiv \frac{\sin\{(1-t)\Omega\}}{\sin\Omega}\tilde{q}_1 + \frac{\sin(t\Omega)}{\sin\Omega}\tilde{q}_2 \tag{75}$$

23.2　Lerp (Linear interpolation)

Ω が微小角の場合は式 (75) において $\sin x \approx x$ と近似することで計算量を削減できる．

$$\mathrm{Lerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) \equiv (1-t)\tilde{q}_1 + t\tilde{q}_2 \tag{76}$$

Slerp では $\tilde{q}$ が超球面上を通るように補間したが，Lerp は $\tilde{q}_1$ から $\tilde{q}_2$ までを直線経路で補間する．そのため，$\tilde{q}$ は殆どの場合超球面上に存在せず，Lerp による補間を行った後は正規化を行う必要がある．また，Lerp の場合には t を一定の割合で変化させても角速度が一定とならない [8]．

23.3　補間における注意点

四元数の補間を行う際には，同じ回転を表すもう一つの四元数の存在に注意しなければならない．

四元数の符号を反転させると，軸ベクトルの向きが逆かつ軸周りの回転方向が逆となる．つまり，3 次元空間においては符号の異なる二つの四元数（$\tilde{q}$ と $-\tilde{q}$）が全く同じ回転を表すことになる．しかし，4 次元空間においてはそれぞれ異なる位置に存在するため，正と負どちらの四元数を選んで補間を行うかによって結果が異なってしまう．具体的には，$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ と $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} -\tilde{q}_2$ ではどちらか一方が最短経路での補間となり，もう一方は長い経路での補間となる．これは中心を O とする 2 次元上の円の補間において，円周上に存在する A と B（$\angle \mathrm{AOB} \neq 180^\circ$）の二点間を $\angle \mathrm{AOB} < 180^\circ$ の経路で補間するか $\angle \mathrm{AOB} > 180^\circ$ の経路で補完するかという問題に似ている．

実際に $\tilde{q}_2$ と $-\tilde{q}_2$ のどちらを用いれば良いかという判断は $\tilde{q}_1$ と $\tilde{q}_2$ の内積を用いて行い，両者の内積が正なら最短経路，負なら長い経路で補間される．一般には最短経路での補間を行いたいことが多いので，$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ で計算しようとして $\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2 < 0$ であった場合には $\tilde{q}_2$ の符号を反転して $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} -\tilde{q}_2$ とすれば良い．

24　角速度の積分

機体に固定したセンサにより機体座標系の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ [rad/s] が計測できる場合，任意の時刻 t [s] までの角速度を積分することで得られる四元数 $\tilde{q}_t$ はその時刻における基準座標系から機体座標系までの回転量を表し，これを飛翔体の姿勢と呼ぶ．ただし，変数の下添字は時刻を表し，上添字は座標系を表す（r なら基準座標系上の値を意味し，b なら機体座標系上の値を意味する）．また，初期状態において機体座標系と基準座標系は一致しているものとし，初期姿勢は恒等四元数とする（$\tilde{q}_{t=0} = 1$）．

そもそも姿勢を計算して何ができるかというと，飛翔体の挙動を把握できるというのは当然として，姿勢が分かれば値の座標変換ができる．例えば，機体座標系上で計測した加速度を基準座標系に持っていけば基準座標系上における機体の移動量を計算できる．具体的には，14 章で示した二つの回転の式は以下のような意味を持つ．

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{r}} = \tilde{q}\, \boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}\, \tilde{q}^{-1} \qquad (\mathrm{Body} \to \mathrm{Ref}) \tag{77}$$

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}} = \tilde{q}^{-1}\, \boldsymbol{r}^{\mathrm{r}}\, \tilde{q} \qquad (\mathrm{Ref} \to \mathrm{Body}) \tag{78}$$

ここで，Body → Ref は機体座標系から基準座標系への座標変換を表し，Ref → Body はその逆変換を表す．このような意味を持つことは 2 次元で考えた場合の図を紙にでも描いてみればわかるだろう．

24.1　角速度一定として積分

積分区間 Δt [s] における角速度が一定である場合を考える．機体が角速度 $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ で回転する場合，回転軸は $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ そのものであり，軸回りの回転角は $\|\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\|\Delta t$ となる．つまり，Δt 間における姿勢変化を表す四元数 $\Delta\tilde{q}$ は

$$\Delta\tilde{q} = \cos\frac{\|\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\|\Delta t}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}}{\|\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\|\Delta t}{2} \tag{79}$$

$$= \exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\right) \tag{80}$$

となる．こうして得られた $\Delta\tilde{q}$ と，現時刻 t における姿勢を表す四元数 $\tilde{q}_t$ との積をとることで姿勢を更新できる．

$$\tilde{q}_{t+\Delta t} = \tilde{q}_t \Delta\tilde{q} \tag{81}$$

上式は 15 章で述べた座標系回転の場合の合成順序であるが，この順序となる理由については後述する．

24.2　近似積分

積分区間 Δt が十分小さい場合には近似式を用いることで計算量を削減できる．三角関数の極限より

$$\Delta\tilde{q} = \lim_{\Delta t \to 0} \exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\right) \tag{82}$$

$$= 1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}} \tag{83}$$

が得られるので，姿勢の更新式は

$$\tilde{q}_{t+\Delta t} = \tilde{q}_t \Delta\tilde{q} \tag{84}$$

$$= \tilde{q}_t \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\right) \tag{85}$$

$$= \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}\tilde{q}_t \boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}} \tag{86}$$

となる．

24.3　角速度の積分における合成順序について

姿勢の更新を行う際に合成順序を式 (81) としたが，なぜこの順序となるのだろうか．

単純に回転方向だけで考えると，$\|\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\|\Delta t$ が回転角となるのだからベクトル回転の順序で合成したほうが良いように思える．つまり，姿勢の更新式は

$$\tilde{q}_{t+\Delta t} = \Delta\tilde{q}\tilde{q}_t \tag{87}$$

$$= \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\tilde{q}_t \tag{88}$$

となるのではないかということである．しかし，変数と座標系の関係を考えると，$\tilde{q}_t$ が基準座標系から機体座標系への回転量（基準座標系上の任意軸周りにどれだけ回転させるか）を表しているのに対して $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ が表しているのは機体座標系の各軸周りの角速度であるので，姿勢更新式として式 (88) を用いると機体座標系の各軸周りの回転をそのまま基準座標系の各軸周りの回転として扱うことになってしまい，正しい姿勢が得られない．

そこで，計測値と座標系の関係を正しくするために以下の座標変換を行う．

$$\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{r}} = \tilde{q}_t\,\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\,\tilde{q}_t^{-1} \quad (\mathrm{Body} \to \mathrm{Ref}) \tag{89}$$

座標変換により得られた $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{r}}$ は基準座標系の各軸周りの角速度を表すので，この値を用いてベクトル回転の順序で合成することで正しい姿勢を計算できる．再びベクトル回転の順序で合成して式展開を行うと

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{t+\Delta t} &= \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{r}}\tilde{q}_t & (90)\\
&= \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{q}_t\,\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\,\tilde{q}_t^{-1})\tilde{q}_t & (91)\\
&= \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}\tilde{q}_t\,\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}} & (92)
\end{aligned}$$

となり，式 (86) と同じ式が得られた．結局，角速度の積分を行う際の合成順序が式 (81) のようになっているのは角速度 $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ の座標系を考慮したためである．

因みに，15 章において回転の合成順序と回転を作用させる式（ベクトル回転と座標系回転）はそれぞれ対応していると述べたが，機体の姿勢を表す四元数は一つしか存在せず（正確には $\tilde{q}$ と $-\tilde{q}$ の二つが存在するが座標変換の際に符号は打ち消し合うので気にしなくて良い），座標変換はどちらの方向でも行うことができる．左右から $\tilde{q}$ や $\tilde{q}^{-1}$ を掛けることで式 (77) と式 (78) を相互に変換できることがわかるだろう．つまり，Body → Ref の変換を行うための四元数や Ref → Body の変換を行うための四元数といった区別は存在せず，四元数はただ機体の姿勢を表すだけである．

25　慣性航法への応用

航空機などに搭載される慣性航法装置は，機体に固定されたセンサを用いて自らの姿勢・速度・位置を算出する．センサの計測値にはノイズや誤差が含まれるので実用に耐えうる精度を出すにはカルマンフィルタ等を適用する必要があるが，ここでは機体上のセンサから正確な角速度 $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}\,[\mathrm{rad/s}]$ と加速度 $\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{b}}\,[\mathrm{m/s^2}]$ が得られるものとして慣性航法計算の特に基礎的な部分について述べる．ただし，添字の意味は 24 章のものと同じである．

センサの計測値は機体座標系上における値であるので，基準座標系（慣性座標系）上の移動量を計算するためには座標変換を行わなければならない．そのために，機体の姿勢変化に伴う角速度 $\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}}$ を積分して機体姿勢を表す四元数を逐次更新する．

$$\tilde{q}_{t+\Delta t} = \tilde{q}_t + \frac{\Delta t}{2}\,\tilde{q}_t\,\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{b}} \tag{93}$$

この四元数を用いて機体座標系から基準座標系への座標変換を行うには

$$\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{r}} = \tilde{q}_t\,\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{b}}\,\tilde{q}_t^{-1} \quad (\mathrm{Body} \to \mathrm{Ref}) \tag{94}$$

とすれば良い．あとはデータサンプリング周期 $\Delta t\,[\mathrm{s}]$ ごとに積分していくことで，基準座標系上における機体速度 $\boldsymbol{v}_t^{\mathrm{r}}\,[\mathrm{m/s}]$ と機体位置 $\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{r}}\,[\mathrm{m}]$ が得られる [9]．

$$\boldsymbol{v}_t^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{v}_{t-\Delta t}^{\mathrm{r}} + (\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{r}} + \boldsymbol{g}_t^{\mathrm{r}})\Delta t \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{r}} &= \boldsymbol{R}_{t-\Delta t}^{\mathrm{r}} + \int_0^{\Delta t}\boldsymbol{v}_t^{\mathrm{r}}\,dt & (96)\\
&= \boldsymbol{R}_{t-\Delta t}^{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{t-\Delta t}^{\mathrm{r}}\Delta t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{r}} + \boldsymbol{g}_t^{\mathrm{r}})\Delta t^2 & (97)
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{g}_t^{\mathrm{r}}\,[\mathrm{m/s^2}]$ は位置 $\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{r}}$ における重力加速度である．

26　具体的な計算例

問 1．回転を作用させる式の結果が純虚四元数となることを確認せよ

Ans)

式 (44) の右辺を展開していくと

$$\begin{aligned}
\tilde{q}\boldsymbol{r}\tilde{q}^* &= (q_0 + \boldsymbol{q})\boldsymbol{r}(q_0 - \boldsymbol{q})\\
&= (q_0 + \boldsymbol{q})(q_0\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{q})\\
&= q_0^2\boldsymbol{r} - q_0\boldsymbol{r}\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{r}\boldsymbol{q}\\
&= q_0^2\boldsymbol{r} + q_0(\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}(-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q})\\
&= q_0^2\boldsymbol{r} + q_0\{\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{q}\boldsymbol{r})^*\} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q})\\
&= q_0^2\boldsymbol{r} + 2q_0(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q})\\
&\qquad - \boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

となる．この時点でスカラーとなるのは第四項のみであるが，第四項において $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q}$ に直交するので

$$\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{q}) = 0$$

が成り立ち，最終的にベクトルの項だけが残る．

以上より回転を作用させる式の結果は純虚四元数となることが確認できた．ここでは式 (44) の場合のみ示したが，式 (45) についても同様に式展開することで純虚四元数となることが確認できる．

問 2．位置ベクトル $\boldsymbol{r} = [3, 0, 0]$ を，回転軸 $[1, 1, 0]$ 周りに $\pi\,[\mathrm{rad}]$ 回転させたベクトル $\boldsymbol{r}'$ を求めよ．

Ans)

回転軸を表す単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \frac{[1, 1, 0]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$$

なので，目的の回転を表す四元数は

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= \cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\pi}{2} \\ &= 0 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)\end{aligned}$$

となる．また，共役は

$$\tilde{q}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i - j)$$

であるので，回転後のベクトル $\boldsymbol{r}'$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= \tilde{q}\boldsymbol{r}\tilde{q}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)[3, 0, 0]\frac{1}{\sqrt{2}}(-i - j) \\ &= \frac{1}{2}(i + j)\,3i\,(-i - j) \\ &= \frac{1}{2}(i + j)(-3i^2 - 3ij) \\ &= \frac{1}{2}(i + j)(3 - 3k) \\ &= \frac{1}{2}(3i - 3ik + 3j - 3jk) \\ &= \frac{1}{2}(3i + 3j + 3j - 3i) \\ &= 3j\end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{r}' = [0, 3, 0]$$

27　あとがき

姿勢表現としては抽象的で「わかりにくい」といわれることも多い四元数であるが，本資料を通してその大枠だけでも理解してもらえただろうか．本資料が理解の一助となれば幸いである．

四元数についてより詳しく知りたい読者は，ぜひ参考文献にも目を通していただきたい．特に文献 [1] はハミルトンの生涯から力学や幾何光学などへの応用まで幅広く書かれている．また，文献 [7] は回転の基礎的な部分からオイラー角や方向余弦行列との関係についても書かれており，飛翔体の姿勢を扱う上でより実用的な内容となっている．

参考文献

[1] 堀源一郎，“ハミルトンと四元数：人・数の体系・応用”，海鳴社，2007.

[2] 加藤寛一郎，大屋昭男，柄沢研治，“航空機力学入門”，東京大学出版，2015.

[3] Cibelle Celestino Silva, Roberto de Andrade Martins, “Polar and axial vectors versus quaternions”, *American Association of Physics Teachers*, Vol.70, No.9, pp.958-963, 2002.

[4] 矢野 忠，“四元数の発見”，海鳴社，2014.

[5] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Versor, 参照日 2022/6/24.

[6] 金谷健一，“3 次元回転：パラメータ計算とリー代数による最適化”，共立出版，2019.

[7] Jack B. Kuipers, “Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality”, *Princeton Univercity Press*, 1999.

[8] Erik B. Dam, Martin Koch, Martin Lillholm, “Quaternions, Interpolation and Animation”, Technical Report DIKU-TR-98/5 Department of Computer Science University of Copenhagen Universitetsparken 1 DK-2100 Kbh Ø Denmark, 1998.

[9] 大坪孔治，小口美津夫，“慣性誘導システム”，計測と制御，Vol.23，No.1，pp.56-60，1984.