

オイラー角と固定角の関係

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2023 年 1 月 5 日

1 はじめに

本資料では、四元数 [1] を用いてオイラー角と固定角 [2] の関係を明らかにする。

固定角という呼び方はあまり一般的でないと思うが、回転軸が変化するオイラー角との対比として、固定角と呼ぶことにする。また、四元数は上にチルダを付けて \tilde{q} のように表記する。

2 オイラー角と固定角

まず、オイラー角と固定角の定義について述べておこう。

A, B という二つの三次元直交座標系があり、B の A に対する姿勢（角度）を考える。このとき、オイラー角は B の各軸周りの回転を用いて表現する。つまり、最初に B の x 軸周りに回したら次は最初の回転によって移動した B の y 軸周りに回転... といったふうに、回転軸自体が都度変化する。一方、固定角は A の各軸周りの回転を用いて表現するため、回転軸は変化しない。

両者とも回転軸の選び方は任意であり、連続して同じ軸を選ぶ場合を除けば全部で 12 通りの組み合わせがある。どのように選んでも良いが、ここでは図 1 に示す z-y-x 系で考えよう。ただし、 ψ, θ, ϕ はそれぞれ z, y, x 軸周りの回転角である。

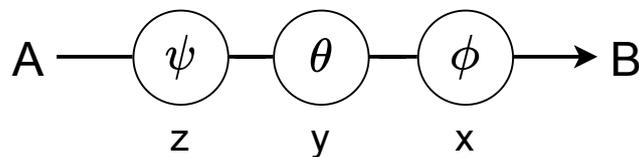


図 1 z-y-x 系の回転順序

3 四元数による表現

両者の関係を明らかにする前段階として、オイラー角と固定角の四元数による表現を考える。といっても特別難しいことではないので軽く目を通して欲しい。

前述したようにオイラー角は回転軸が都度変化するので，オイラー角の各軸周りの回転を表す四元数は以下のように書ける．二回目，三回目の回転軸がそれ以前の回転の影響を受けていることに注目して欲しい．

$$\tilde{q}_\psi = \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \quad (1)$$

$$\tilde{q}_\theta = \cos \frac{\theta}{2} + \tilde{q}_\psi j \tilde{q}_\psi^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

$$\tilde{q}_\phi = \cos \frac{\phi}{2} + (\tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi) i (\tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi)^{-1} \sin \frac{\phi}{2} \quad (3)$$

以上より，z-y-x 系オイラー角の回転を表す四元数は

$$\tilde{q}_{\psi\theta\phi} = \tilde{q}_\phi \tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi \quad (4)$$

となる．

一方，固定角では軸が変化しないので，各軸回りの回転を表す四元数は以下のように書ける．オイラー角の場合と異なり，それぞれの回転が独立していることがわかるだろう．

$$\tilde{q}_{\text{fix}\psi} = \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \quad (5)$$

$$\tilde{q}_{\text{fix}\theta} = \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

$$\tilde{q}_{\text{fix}\phi} = \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \quad (7)$$

以上より，z-y-x 系固定角の回転を表す四元数は

$$\tilde{q}_{\text{fix}\psi\theta\phi} = \tilde{q}_{\text{fix}\phi} \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \tilde{q}_{\text{fix}\psi} \quad (8)$$

となる．

回転軸のとり方が異なるので，殆どの場合において $\tilde{q}_{\psi\theta\phi} \neq \tilde{q}_{\text{fix}\psi\theta\phi}$ である．

4 オイラー角と固定角の関係

前置きが長くなってしまったが，ようやく本題に入る．要は $\tilde{q}_{\psi\theta\phi}$ を変形して $\tilde{q}_{\text{fix}*}$ の組み合わせにできれば良いので，地道に変形していこう．

$$\tilde{q}_\phi \tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi = \tilde{q}_\phi \left(\cos \frac{\theta}{2} + \tilde{q}_\psi j \tilde{q}_\psi^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \tilde{q}_\psi \quad (9)$$

$$= \tilde{q}_\phi \left(\tilde{q}_\psi \cos \frac{\theta}{2} + \tilde{q}_\psi j \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (10)$$

$$= \tilde{q}_\phi \tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \quad (11)$$

$$= \left\{ \cos \frac{\phi}{2} + (\tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi) i (\tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi)^{-1} \sin \frac{\phi}{2} \right\} \tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \quad (12)$$

ここで,

$$\tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \tilde{q}_\psi j \tilde{q}_\psi^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \tilde{q}_\psi \quad (13)$$

$$= \tilde{q}_\psi \left(\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (14)$$

$$= \tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \quad (15)$$

より,

$$\tilde{q}_\phi \tilde{q}_\theta \tilde{q}_\psi = \left\{ \cos \frac{\phi}{2} + (\tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta}) i (\tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta})^{-1} \sin \frac{\phi}{2} \right\} \tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \quad (16)$$

$$= \tilde{q}_\psi \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (17)$$

$$= \tilde{q}_{\text{fix}\psi} \tilde{q}_{\text{fix}\theta} \tilde{q}_{\text{fix}\phi} \quad (\because \tilde{q}_\psi = \tilde{q}_{\text{fix}\psi}) \quad (18)$$

が得られる.

以上より, オイラー角と固定角は回転順序が逆の関係にあることが明らかになった. 回転軸が変わってしまう厄介なオイラー角を, 固定角の組み合わせ(しかも逆順にするだけ)で表現できるというのは驚きである. また, 回転軸 (i, j, k) に注目すると式変形によって一切変化していないことがわかる. つまり, この関係は z - y - x 系に限った話ではなく, 回転軸をどのようにとっても成り立つのである.

この関係が成り立つことの良さは, なんととっても式が簡潔になることであろう. 式 (1) ~ 式 (3) のように愚直にオイラー角を表現するよりも, 式 (5) ~ 式 (7) に示す固定角の組み合わせで表現したほうが式が簡潔になる. また, 回転行列を用いる際にも考えやすい.

それにしても, パッと見ではわからない関係がこうして成り立っているのは三次元回転の非常に面白いところである.

参考文献

- [1] Jack B. Kuipers, “Quaternions and rotation sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality”, Princeton University Press, 1998.
- [2] 中島 明, “機械制御工学研究 講義ノート”, 南山大学 理工学部 機械電子制御工学科, 2016.