加速度・磁気センサの値から姿勢を求める

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2023 年 1 月 5 日

1　はじめに

外乱や計測誤差の存在しない理想的な環境であれば，重力加速度ベクトルと地磁気ベクトルを見ることでセンサの固定された機体座標系の姿勢（基準座標系に対する角度）を求めることができる．そこで，本資料では機体に固定された加速度・磁気センサの値を用いて姿勢を求める方法を示す．なお，本資料中においてベクトルは太字の斜体で $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ のように表記し，四元数は上にチルダを付けて $\tilde{q} \in \mathbb{H}$ のように表記する．

2　使用する演算

姿勢計算に用いる演算を定義する．3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が存在するとき，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ の場合に

$$\boldsymbol{b} = \tilde{q}\boldsymbol{a}\tilde{q}^{-1} \tag{1}$$

を満たす四元数 $\tilde{q}$ を求める演算を

$$\tilde{q} : \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b} \tag{2}$$

と表記する．式 (1) を満たす $\tilde{q}$ は複数存在するが，ここでは回転角 θ と回転軸 $\boldsymbol{n}$ をそれぞれ

$$\theta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|} \tag{3}$$

として $\tilde{q}$ を以下のように定義する．

$$\tilde{q} := \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

ただし，上式では $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ において特異点となるため適宜対処する必要がある．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の角度を Ω[rad] とすると，$\Omega = 0$ の場合には

$$\tilde{q}_{\Omega=0} = 1 \tag{5}$$

とし，$\Omega = \pi$ の場合には $\boldsymbol{a}$ ないし $\boldsymbol{b}$ に直角なベクトル $\boldsymbol{c}$（$\|\boldsymbol{c}\| = 1$）を適当に決めて

$$\tilde{q}_{\Omega=\pi} = \cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{c}\sin\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

$$= \boldsymbol{c} \tag{7}$$

とすれば良い．

3　姿勢計算

真の姿勢を $\tilde{q}_r$ として，これが以下のように定義されるものとする．

$$\tilde{q}_r := \tilde{q}_e \tilde{q}_g \tag{8}$$

ここで，$\tilde{q}_g$ は対地角であり，$\tilde{q}_e$ は $\tilde{q}_g$ を $\tilde{q}_r$ に一致させるための補正角である．また，機体座標系上で計測される重力加速度ベクトル $\boldsymbol{g}_\mathrm{B}$ および地磁気ベクトル $\boldsymbol{m}_\mathrm{B}$ と，それぞれの基準座標系上における値である $\boldsymbol{g}_\mathrm{R}$ および $\boldsymbol{m}_\mathrm{R}$ との対応を考えて，以下の 3 式が成り立つものとする（ENU 座標系であれば $\boldsymbol{g}_\mathrm{R} = [0, 0, 1]$ および $\boldsymbol{m}_\mathrm{R} = [0, 1, 0]$ となる）．

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_\mathrm{R} = \tilde{q}_g \boldsymbol{g}_\mathrm{B} \tilde{q}_g^{-1} & \text{(9a)} \\ \boldsymbol{g}_\mathrm{R} = \tilde{q}_r \boldsymbol{g}_\mathrm{B} \tilde{q}_r^{-1} & \text{(9b)} \\ \boldsymbol{m}_\mathrm{R} = \tilde{q}_r \boldsymbol{m}_\mathrm{B} \tilde{q}_r^{-1} & \text{(9c)} \end{cases}$$

このとき，上記第一式と第二式が成立するためには $\mathsf{V}\tilde{q}_e \parallel \boldsymbol{g}_\mathrm{R}$ である必要がある（V は四元数のベクトル部を取り出す演算子）．これは，$\mathsf{V}\tilde{q}_e \parallel \boldsymbol{g}_\mathrm{R}$ が成り立つ場合には $\tilde{q}_e$ と $\boldsymbol{g}_\mathrm{R}$ の積が可換となり，式 (9b) を以下のように変形できるためである．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_\mathrm{R} &= \tilde{q}_r \boldsymbol{g}_\mathrm{B} \tilde{q}_r^{-1} && (10) \\ &= (\tilde{q}_e \tilde{q}_g) \boldsymbol{g}_\mathrm{B} (\tilde{q}_e \tilde{q}_g)^{-1} && (11) \\ &= \tilde{q}_e (\tilde{q}_g \boldsymbol{g}_\mathrm{B} \tilde{q}_g^{-1}) \tilde{q}_e^{-1} && (12) \\ &= \tilde{q}_e \boldsymbol{g}_\mathrm{R} \tilde{q}_e^{-1} && (13) \\ &= \boldsymbol{g}_\mathrm{R} \tilde{q}_e \tilde{q}_e^{-1} \quad (\because \mathsf{V}\tilde{q}_e \parallel \boldsymbol{g}_\mathrm{R}) && (14) \\ &= \boldsymbol{g}_\mathrm{R} && (15) \end{aligned}$$

以上より $\tilde{q}_e$ には満たすべき条件が存在することがわかった．一方，$\tilde{q}_g$ に関しては特に制約が無いので，式 (9a) より

$$\tilde{q}_g : \boldsymbol{g}_\mathrm{B} \to \boldsymbol{g}_\mathrm{R} \tag{16}$$

として求まる．$\tilde{q}_g$ が求まったら，式 (9c) より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_\mathrm{R} &= \tilde{q}_r \boldsymbol{m}_\mathrm{B} \tilde{q}_r^{-1} && (17) \\ &= (\tilde{q}_e \tilde{q}_g) \boldsymbol{m}_\mathrm{B} (\tilde{q}_e \tilde{q}_g)^{-1} && (18) \\ &= \tilde{q}_e (\tilde{q}_g \boldsymbol{m}_\mathrm{B} \tilde{q}_g^{-1}) \tilde{q}_e^{-1} && (19) \\ &= \tilde{q}_e \boldsymbol{m}_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} \tilde{q}_e^{-1} && (20) \end{aligned}$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} := \tilde{q}_g \boldsymbol{m}_\mathrm{B} \tilde{q}_g^{-1}$ とおいた．ここで，式 (20) より

$$\tilde{q}_e : \boldsymbol{m}_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} \to \boldsymbol{m}_\mathrm{R} \tag{21}$$

とすることで $\tilde{q}_e$ が求まるように思える．しかし，$\tilde{q}_e$ は $\mathsf{V}\tilde{q}_e \parallel \boldsymbol{g}_\mathrm{R}$ という条件を満たす必要があるので，

$$\boldsymbol{m}'_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} \circ [1, 1, 0] \tag{22}$$

として伏角を除去する必要がある（$\circ$ はアダマール積）．こうすれば，

$$\tilde{q}_e : \boldsymbol{m}'_{\mathrm{B}\to\mathrm{R}} \to \boldsymbol{m}_\mathrm{R} \tag{23}$$

より $\tilde{q}_e$ が求まる．以上より $\tilde{q}_g$ と $\tilde{q}_e$ が得られたので，これらを式 (8) に代入することで姿勢が求まる．

4　おわりに

本資料で示した方法はあくまで理想的な環境下での話であるが，このようにして得られた姿勢を基準姿勢として姿勢推定フィルタに組み込むことで実用的な姿勢推定が可能となる．読者による応用を期待したい．