特異点を持たない Versor 求解アルゴリズム

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2023 年 1 月 5 日

1　はじめに

四元数の理論において，Versor とはノルムが 1 で回転を表す四元数のことを指す．本資料では 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が与えられた場合に $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ のところまで移動（回転）させる四元数 $\tilde{q} \in \mathbb{H}$ を求めるアルゴリズムについてまとめる．これは $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ である場合に

$$\boldsymbol{b} = \tilde{q}\boldsymbol{a}\tilde{q}^{-1} \tag{1}$$

を満たす $\tilde{q}$ を求める問題であり，この等式を満たす $\tilde{q}$ は複数存在するため何かしらの条件のもとで求める必要がある．式変形のみでは一意に求めることができないので，本資料では“ 求解 ”と呼ぶことにする．

2　直交なベクトルを求めるアルゴリズム

本題に入る前に，3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$（ただし $\|\boldsymbol{a}\| > 0$）に直交するベクトル $\boldsymbol{r}$ を求めるアルゴリズムを考える．まず，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の各要素を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

と表す．ここで，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{r}$ であれば両者の内積が 0 となる．逆にいえば，内積が 0 となるように $\boldsymbol{r}$ を決めれば $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{r}$ が成り立つので，一例として

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

とすれば

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = a_0(-a_1) + a_1 a_0 = 0 \tag{4}$$

となり（$\cdot$ は内積），確かに $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{r}$ であることがわかる．このように，一つの要素をゼロにして残り二つの要素を片方の符号を反転させた状態で入れ替えることで $\boldsymbol{r}$ を求めることができる．ただし注意点として，入れ替える要素のうちどちらか片方は必ずゼロ以外である必要がある．例えば，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の場合に第二・第三要素を入れ替えてしまうと $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり直交なベクトルが得られない．

以上を踏まえて，$\|\boldsymbol{a}\| > 0$ である限りは確実に直交なベクトルを求められるように以下の条件を設ける．

- 入れ替える要素は，$\boldsymbol{a}$ の各要素のうち，絶対値が最大の要素と中間の要素とする．
- 符号は反転させる要素は，$\boldsymbol{a}$ の各要素のうち絶対値が最大の要素とする．

ここで，$\boldsymbol{a}$ の各要素の絶対値をとったベクトルを

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}} = \begin{bmatrix} |a_0| & |a_1| & |a_2| \end{bmatrix} \tag{5}$$

とする．また，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ の $i \in [0, 2]$ 番目の要素を $\boldsymbol{x}[i]$ と表すものとする．この表記法に従って，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}$ の最大値を $\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\max}]$ とし，中央値を $\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\mathrm{med}}]$ とすると，$\boldsymbol{r}$ の各要素は

$$\boldsymbol{r}[i_{\mathrm{med}}] = -\boldsymbol{a}[i_{\max}] \tag{6}$$
$$\boldsymbol{r}[i_{\max}] = \boldsymbol{a}[i_{\mathrm{med}}] \tag{7}$$
$$\boldsymbol{r}[3 - (i_{\max} + i_{\mathrm{med}})] = 0 \tag{8}$$

と書ける．$i_{\max}$ を求める際は，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i]$ が最大となる i を探せば良い．$\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\max}]$ が求まれば，それ以外の 2 つの要素のうち大きいほうが $\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}$ の中央値となる．つまり，i_{med} の候補となる 2 つの変数がそれぞれ

$$i_{\mathrm{med1}} = (i_{\max} + 1) \bmod 3 \tag{9}$$
$$i_{\mathrm{med2}} = (i_{\max} + 2) \bmod 3 \tag{10}$$

となるので，i_{med} は

$$i_{\mathrm{med}} = \begin{cases} i_{\mathrm{med1}} & (\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\mathrm{med1}}] \geq \boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\mathrm{med2}}]) \\ i_{\mathrm{med2}} & (\boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\mathrm{med1}}] < \boldsymbol{a}_{\mathrm{abs}}[i_{\mathrm{med2}}]) \end{cases} \tag{11}$$

として求まる．

3　従来の求解アルゴリズム

前置きが長くなってしまったが本題に入ろう．なお，章題にある“ 従来の ”というのは筆者が今まで使ってきたという意味であって世間一般で用いられてきたという意味ではないことに注意されたい．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ のところまで移動させることを考えた場合，まず思いつくのは図 1 のように $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{n}$ を求める方法だろう．この場合，式 (1) を満たす $\tilde{q}$ は回転角 θ[rad] と回転軸 $\boldsymbol{n}$ をそれぞれ

$$\theta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|} \tag{12}$$

として（$\times$ は外積），以下のように得られる．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{13}$$

ただし，この方法は $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ に特異点を持ち，特異点においては $\boldsymbol{n}$ を定義できなくなるため適宜対処する必要がある．具体的には，$\theta = 0$ の場合には

$$\tilde{q}_{\theta=0} = 1 \tag{14}$$

とし，$\theta = \pi$ の場合には $\boldsymbol{a}$ ないし $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{r}$（$\|\boldsymbol{r}\| = 1$）を適当に決めて

$$\tilde{q}_{\theta=\pi} = \cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{r}\sin\frac{\pi}{2} \tag{15}$$
$$= \boldsymbol{r} \tag{16}$$

とすれば良い．このようにすることで理論的には $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がどのような位置関係にあっても $\tilde{q}$ を計算できる．しかし，特異点における処理とそれ以外の処理は連続的につながっているわけではないため，プログラムに実装すると特異点近傍で計算精度が低下してしまう．

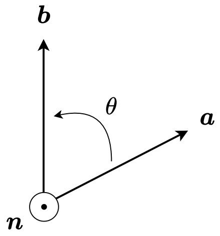


図 1　従来の求解アルゴリズム

4　特異点を持たない求解アルゴリズム

3 章で示したアルゴリズムは，回転軸を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交するように制限して回転角を変える方法であった．そこで，もう一つの方法として回転角を π[rad] に固定して回転軸を変える方法を考える．回転角を π にするためには，回転軸 $\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の中間にあれば良いので

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathsf{U}\boldsymbol{a} + \mathsf{U}\boldsymbol{b}}{\|\mathsf{U}\boldsymbol{a} + \mathsf{U}\boldsymbol{b}\|} \tag{17}$$

より，式 (1) を満たす $\tilde{q}$ が以下のように求まる．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{n} \tag{18}$$

ここで，式 (17) における U は正規化演算子であり

$$\mathsf{U}\boldsymbol{a} := \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{19}$$

と定義される．また，ベクトル間の角度を

$$\Omega = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right) \tag{20}$$

とする．

上記のように $\tilde{q}$ を求めても，$\Omega = \pi$[rad] の場合には相変わらず特異点となってしまう．ただし，今回は $\Omega = 0$ に特異点を持たないので，この性質を上手く利用すれば $\Omega = \pi$ における特異点も無くすことができそうである．どうすれば良いかと考えていたら，寝る直前に以下の方法を思いついた．

Step1: Ω が π に近くなったら，$\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{b}$ のところまで移動させるための回転軸 $\boldsymbol{c}$ を求める．

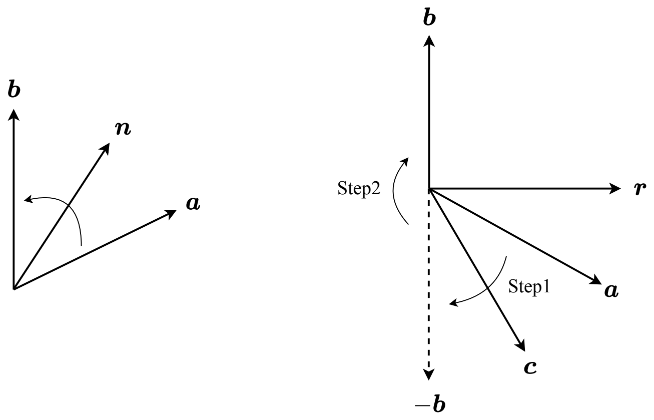
$$\boldsymbol{c} = \frac{\mathsf{U}\boldsymbol{a} + \mathsf{U}(-\boldsymbol{b})}{\|\mathsf{U}\boldsymbol{a} + \mathsf{U}(-\boldsymbol{b})\|} \tag{21}$$

Step2: 次に，Step1 で $-\boldsymbol{b}$ のところまで移動させた $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ のところまで移動させるための回転軸 $\boldsymbol{r}$ を求める．この回転軸は $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{r}$ かつ $\|\boldsymbol{r}\| = 1$ を満たせばどのように選んでも良い．

Step3: 最後に Step1 と Step2 で求めた回転を合成して，式 (1) を満たす $\tilde{q}$ を

$$\tilde{q} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c} \tag{22}$$

として得る．



$\Omega \leq \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\Omega > \dfrac{\pi}{2}$

図 2　特異点を持たない求解アルゴリズム

このようにすることで $\Omega = \pi$ 近傍の計算を $\Omega = 0$ 近傍の計算に置き換えることができ，$\Omega = \pi$ における特異点を無くすことができる．ただし，式 (21) は $\Omega = 0$ に特異点を持つため，式 (18) と式 (22) は相補的な関係にあることがわかる．そこで，Ω を見て式 (18) と式 (22) を切り替えることで任意の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$（ただし $\|\boldsymbol{a}\| > 0$ かつ $\|\boldsymbol{b}\| > 0$）に対して特異点を生じることなく $\tilde{q}$ を求められるようになる．二つの式はどこで切り替えても良いが，極端に特異点に近い場所で切り替えると計算精度が低下する恐れがあるので $\Omega = \pi/2$ で切り替えて

$$\tilde{q} = \begin{cases} \boldsymbol{n} & (\Omega \leq \pi/2) \\ \boldsymbol{rc} & (\Omega > \pi/2) \end{cases} \tag{23}$$

のようにするのが無難だろう．本アルゴリズムを図解すると，図 2 のようになる．

5　おわりに

本資料では式 (1) を満たす $\tilde{q}$ を求める方法についてまとめ，4 章では特異点を持たない求解アルゴリズムを示した．二つの式を切り替えているので特異点を“ 持たない ”というよりは“ 回避している ”と表現した方が正しいかもしれないが，いずれにせよ特異点近傍における計算精度の低下が避けられなかった 3 章のアルゴリズムと比べると 4 章で示したアルゴリズムの優位性がわかるだろう．

本資料で示した求解アルゴリズムの応用先の一つとして，飛翔体の姿勢計算がある．基準座標系上における重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^3$ とし，機体座標系上で計測した重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}_{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}^3$ とすれば

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{R}} = \tilde{q}_g \boldsymbol{g}_{\mathrm{B}} \tilde{q}_g^{-1}$$

を解くことで対地角 $\tilde{q}_g \in \mathbb{H}$ を求めることができ，このような演算で理論的に特異点を持たないことは非常に重要である．

姿勢計算に限らず，読者による幅広い応用を期待したい．