四元数まとめ資料

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2021 年 1 月 10 日

1 まえがき

四元数 (Quaternion) は 1843 年にアイルランドの数学者 William Rowan Hamilton(1805-1865) によって発見された [1].

本資料は，主に飛翔体の姿勢計算を行う際に必要となる式についてまとめる．

2 座標系の定義

本資料では，以下の 2 つの座標系を取り扱う．

- 慣性座標系 (Inertial frame)
- 機体座標系 (Body frame)

慣性座標系は，慣性空間に固定された座標系である．機体座標系は，原点が航空機等の機体の重心位置に固定され，慣性空間上を機体とともに移動・回転する動座標系である．

また，両座標系ともに上向きを正とした右手系の直交座標系とする．

3 記号

本資料で使用する記号についてまとめる．

3.1 四元数 ($\in \mathbb{H}$)

本資料では，上にチルダを付けて

$$\tilde{q}$$

のように表す．

3.2 ベクトル ($\in \mathbb{R}^3$)

ベクトルはボールド体とし，その成分を添え字 1,2,3 で表す．また，式中に四元数とベクトルが混在するため，ベクトルの括弧を角括弧として区別する．例えば，

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$$

と表記する．

3.3 内積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積はドットで表す．

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

3.4 外積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積はクロスで表す．

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1]$$

4 四元数の定義

スカラー部を q_0，ベクトル部を $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ として，四元数の成分を

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= (q_0, [q_1, q_2, q_3]) \\ &= q_0 + \mathbf{q} \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\end{aligned}$$

のように表す．

ここで，$1, i, j, k$ は四元数の基底と呼ばれ，以下の性質を満たす．

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{1}$$

この等式は，基底間の可能な全ての積を決定する．例えば，$-1 = ijk$ の両辺に k を掛ければ，

$$\begin{aligned}-k &= ijkk = ij(k^2) = ij(-1) \\ k &= ij\end{aligned}$$

を得る．他の積も同じように得られて，結局

$$\begin{aligned}ij = k = -ji, \\ jk = i = -kj, \\ ki = j = -ik\end{aligned}$$

が可能な全ての積を列挙したものとなる．また，以上からわかるように基底間の積は非可換である．

5　ハミルトン積

ハミルトン積とは四元数同士の積のことである．

この積は非可換であるが，結合法則を満たす．つまり，任意の四元数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ に関して

$$\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = (\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c})$$

が成り立つ．また，ノルムは乗法的であり

$$\|\tilde{a}\tilde{b}\| = \|\tilde{a}\|\|\tilde{b}\|$$

となる．

二つの四元数 $\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ のハミルトン積は，式 (1) と分配法則に従って以下のように導出できる．

$$\begin{aligned}
\tilde{q}\tilde{p} &= (q_0 + \mathbf{q})(p_0 + \mathbf{p}) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{qp} \\
&= q_0p_0 \\
&\quad +(q_0p_1i + q_0p_2j + q_0p_3k) \\
&\quad +(p_0q_1i + p_0q_2j + p_0q_3k) \\
&\quad +(q_1p_1i^2 + q_1p_2ij + q_1p_3ik + q_2p_1ji + q_2p_2j^2 \\
&\qquad +q_2p_3jk + q_3p_1ki + q_3p_2kj + q_3p_3k^2)
\end{aligned}$$

これを式 (1) の規則に従って整理すると

$$\begin{aligned}
\tilde{q}\tilde{p} = &(q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) \\
&+ (q_0p_1 + p_0q_1 + q_2p_3 - q_3p_2)i \\
&+ (q_0p_2 + p_0q_2 - q_1p_3 + q_3p_1)j \\
&+ (q_0p_3 + p_0q_3 + q_1p_2 - q_2p_1)k
\end{aligned} \tag{2}$$

となり，$\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ のハミルトン積が得られる．

また，上式を注意深く観察すると，ベクトル部同士の積に関して以下の関係が成り立っていることが確認できる．

$$\mathbf{qp} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{3}$$

これこそがハミルトンの探し求めていたベクトルの乗算法則であり，現在のベクトル解析における内積と外積はここから定義された [12]．また，式 (3) はスカラー部とベクトル部より構成されるから四元数である．

式 (3) の関係を用いて式 (2) を書き直すと

$$\tilde{q}\tilde{p} = q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{4}$$

となり，式を簡潔に表せるようになる．

6　ハミルトン積が可換になる場合

5 章においてハミルトン積は非可換であると述べた．定義からわかるようにこれは事実であるが，特定の条件では可換積となることがある．

これは式 (4) を見れば明らかであるが，ハミルトン積が非可換なのは式中に外積の項が含まれているためである．つまり，二つの四元数 $\tilde{a} = a_0 + \mathbf{a}$，$\tilde{b} = b_0 + \mathbf{b}$ において

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

であれば，これらの積は可換となる．

7　共役四元数

四元数 $\tilde{q} = q_0 + \mathbf{q}$ のベクトル部の符号を反転したものを共役四元数といい，アスタリスクを付けて以下のように表す．

$$\tilde{q}^* \equiv q_0 - \mathbf{q} \tag{5}$$

この定義より

$$\tilde{q}^* + \tilde{p}^* = (\tilde{q} + \tilde{p})^*$$

が成り立つことは明らかであり，また，積に関して以下が成り立つ．

$$\tilde{q}^*\tilde{p}^* = (\tilde{p}\tilde{q})^*$$

この性質は n 個の四元数の積に一般化できて，

$$\tilde{q}_1^*\tilde{q}_2^*\tilde{q}_3^* \ \dots\ \tilde{q}_n^* = (\tilde{q}_n \ \dots\ \tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* \tag{6}$$

が成り立つ．

8　ノルム

共役四元数を用いると，ノルムが定義できる．

$$\|\tilde{q}\| \equiv \sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*} = \sqrt{\tilde{q}^*\tilde{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{7}$$

9　単位四元数

単位四元数とは，ノルムが 1 の四元数のことである．零でない四元数 $\tilde{q}$ をそのノルムで割ると，単位四元数

$$U_{\tilde{q}} = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} \tag{8}$$

が得られ，この処理を四元数の正規化という．

また，後述する回転を表す単位四元数を Versor（ベルサー，ベルソル）と呼ぶことがある．ラテン語で「回転する」を表す versare に由来する単語とされており，ハミルトンによって四元数の表現に導入された [11]．

10　逆四元数

共役四元数とノルムを用いることで，逆四元数 $\tilde{q}^{-1}$ を定義できる．

$$\tilde{q}^{-1} \equiv \frac{\tilde{q}^*}{\|\tilde{q}\|^2} \tag{9}$$

この定義と式 (7) より $\tilde{q}^{-1}\tilde{q} = \tilde{q}\tilde{q}^{-1} = 1$ となることが確認でき，単位四元数の場合には共役が逆四元数となる ($\tilde{q}^* = \tilde{q}^{-1}$)．

また，複数の逆四元数の積に関して以下が成り立つ．

$$\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-1}\tilde{q}_3^{-1} \ldots \tilde{q}_n^{-1} = (\tilde{q}_n \ldots \tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^{-1} \tag{10}$$

これは，共役四元数の積の性質とハミルトン積のノルムが乗法的であることより確認できる．

11　純虚四元数 (Pure Quaternion)

スカラー部が 0 であり，ベクトル部の少なくとも一つが 0 ではない四元数を純虚四元数という．

$$\tilde{q} = (0, [q_1, q_2, q_3])$$

12　実四元数 (Real Quaternion)

スカラー部が 0 ではなく，ベクトル部の要素が全て 0 である四元数を実四元数という．

$$\tilde{q} = (q_0, [0, 0, 0])$$

13　回転を表す四元数 (Versor)

3 次元空間における物体の回転は，回転軸とその周りの回転角によって表すことが出来る．4 自由度に見えるが，ノルムが 1 という制約があるので 3 自由度になる．

ここで，回転軸を表す単位ベクトル $\mathbf{n}$ と，その周りの回転角 θ を用いて，以下の四元数を考える．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2} \quad (-2\pi \leq \theta \leq 2\pi) \tag{11}$$

この式を用いることで，3 次元空間の回転と四元数を結びつけることができる．初期状態の位置ベクトルを $\mathbf{r}$，回転後の位置ベクトルを $\mathbf{r}'$ として，(i) 座標系を固定して位置ベクトルを回転させる場合と，(ii) 位置ベクトルを固定して座標系を回転させる場合の式を以下に示す．

$$\text{(i)} \quad \mathbf{r}' = \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^{-1} \qquad \text{（位置ベクトルの回転）} \tag{12}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{r}' = \tilde{q}^{-1}\mathbf{r}\tilde{q} \qquad \text{（座標系の回転）} \tag{13}$$

(i) と (ii) の違いは直感的にはわかりにくいかもしれないが，これらは互いに逆回転を表している．試しに，位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して (i) と (ii) の両方の回転を適用してみると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \tilde{q}^{-1}(\tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^{-1})\tilde{q} \\ &= (\tilde{q}^{-1}\tilde{q})\mathbf{r}(\tilde{q}^{-1}\tilde{q}) \\ &= \mathbf{r} \end{aligned}$$

となり，互いに逆回転を表すので回転が打ち消されていることが分かる．

Versor の場合には $\tilde{q}^* = \tilde{q}^{-1}$ となるので，これ以降の回転変換は見やすさのために共役で表記する．

14　回転の合成

14.1　位置ベクトルの回転

位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して，$\tilde{q}$ による位置ベクトルの回転を考える．ここで，変化後の位置ベクトルを $\mathbf{r}_{\tilde{q}}$ のように添え字で表すと，式 (12) より

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}} = \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^*$$

となる．さらに，$\mathbf{r}_{\tilde{q}}$ に対して $\tilde{p}$ による位置ベクトルの回転を行うと，

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{q}\tilde{p}} &= \tilde{p}\mathbf{r}_{\tilde{q}}\tilde{p}^* \\ &= \tilde{p}(\tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^*)\tilde{p}^* \end{aligned}$$

ここで，式 (6) と結合法則を用いると上式は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{q}\tilde{p}} &= (\tilde{p}\tilde{q})\mathbf{r}(\tilde{q}^*\tilde{p}^*) \\ &= (\tilde{p}\tilde{q})\mathbf{r}(\tilde{p}\tilde{q})^* \end{aligned}$$

と変形できる．

つまり，四元数同士の積は回転の合成となっており，複数の回転を一つの四元数で表すことが出来る．

例えば，時刻 t において四元数 $\tilde{q}(t)$ があり，その後 Δt の間に $\tilde{q}(\Delta t)$ だけ変化したとすると，時刻 $t + \Delta t$ における四元数は，

$$\tilde{q}(t + \Delta t) = \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)$$

となる．

14.2　座標系の回転

位置ベクトルの回転と同様に考える．位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して $\tilde{q}, \tilde{p}$ による座標系の回転を行うと

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{q}\tilde{p}} &= (\tilde{p}^*\tilde{q}^*)\mathbf{r}(\tilde{q}\tilde{p}) \\ &= (\tilde{q}\tilde{p})^*\mathbf{r}(\tilde{q}\tilde{p}) \end{aligned}$$

となり，時刻 t に対しては

$$\tilde{q}(t+\Delta t)=\tilde{q}(t)\tilde{q}(\Delta t)$$

である．

上述のとおり，回転の合成とは共役四元数の積の性質を用いて式 (12),(13) から導かれるものであり，後に適用する回転が二種類の回転のうちどちらなのかによって合成する際の積の順序が変化する．

例えば，$\tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)$ の順序で合成した後に $\tilde{q}^*\mathbf{r}\tilde{q}$ の回転を適用すると，回転順序が逆かつそれぞれの回転方向も逆となる．このことは式 (6) から確認できる．

15　恒等四元数 (Identity Quaternion)

式 (11) より，軸回りの回転角 $\theta=0$ のときには

$$\tilde{q}=(1,[0,0,0])$$

を得る．この四元数による回転は恒等写像となる（回転を与えない）ことから，上記の四元数は恒等四元数と呼ばれる．

計算上は実数の 1 と同じ扱いになるが，飛翔体等の初期姿勢を表す際には恒等四元数が用いられることが多い．

16　指数函数

任意の四元数 $\tilde{q}=q_0+\mathbf{q}$ に関して，ネイピア数 e(= 2.71828...) の四元数冪は

$$\exp(\tilde{q})\equiv e^{q_0}\left(\cos\|\mathbf{q}\|+\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\sin\|\mathbf{q}\|\right) \tag{14}$$

である．

17　対数函数

任意の四元数 $\tilde{q}=q_0+\mathbf{q}$ に関して，対数函数 $\ln(\tilde{q})$ は $\exp(\tilde{q})$ の逆函数であり，

$$\ln(\tilde{q})\equiv\ln\|\tilde{q}\|+\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\arccos\frac{q_0}{\|\tilde{q}\|} \tag{15}$$

と定義される．

18　冪函数

任意の四元数 $\tilde{q}=\|\tilde{q}\|(\cos\Omega+\mathbf{n}\sin\Omega)$ に関して，底 $\tilde{q}$ および冪指数 t を持つ冪は，

$$\tilde{q}^t\equiv\|\tilde{q}\|^t\{\cos(t\Omega)+\mathbf{n}\sin(t\Omega)\} \tag{16}$$

である．

19　Versor から回転軸と回転角を取り出す

Versor は式 (11) のように書かれるので，$\tilde{q}$ の回転角 θ はスカラー部を比較して

$$q_0=\cos\frac{\theta}{2}$$

より，以下のように求まる．

$$\theta=2\arccos q_0$$

もしくは，正接の定義より

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=\frac{\|\mathbf{q}\|}{q_0}$$

$$\theta=2\arctan\frac{\|\mathbf{q}\|}{q_0}$$

のように求めることもできる．ただ，一般に arctan の計算速度は arccos や arcsin に比べて遅いので，スカラー部とベクトル部両方の値を使って計算したいのであれば以下の式を使ったほうが良いだろう（両方使う意味は特に無いが，四元数はもともと四つ一組の数なので両方使ったほうが何となく気持ち良い）．

$$\theta=\begin{cases}+2\arcsin\|\mathbf{q}\| & (q_0\geq 0)\\ -2\arcsin\|\mathbf{q}\| & (q_0<0)\end{cases}$$

回転軸を求める際は，単純にベクトル部を正規化して

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$$

とするか，回転角の場合と同様に各要素を比較して

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\frac{1}{\sin(\theta/2)}\mathbf{q}\\ &=\frac{1}{\sin(\arccos q_0)}\mathbf{q}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-q_0^2}}\mathbf{q}\end{aligned}$$

のように求めれば良い．

20　四元数の時間微分

ここでは，回転の合成から四元数の時間微分を導出する．前述したように，合成の順序は後に適用する回転によって二種類存在するため，時間微分を考える際にもこれらの違いを考慮する必要がある．

20.1　位置ベクトルが回転する場合

時刻 t における四元数 $\tilde{q}(t)$ が Δt 後に $\tilde{q}(t+\Delta t)$ になったとすると，位置ベクトルの回転の合成より

$$\tilde{q}(t+\Delta t) = \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)$$

を得る．

回転を表す四元数として式 (11) を考えた．このとき，微小時間 Δt 間の変化が回転軸 $\mathbf{n}(\|\mathbf{n}\| = \mathbf{1})$ まわりの微小角 $\Delta\theta$ によるものとすると，

$$\tilde{q}(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx 1 + \frac{\Delta\theta}{2}\mathbf{n}$$
$$\left(\because \lim_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0}\sin x = x\right)$$

これより

$$\begin{aligned}\tilde{q}(t+\Delta t) &= \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)\\ &= \left(1 + \frac{\Delta\theta}{2}\mathbf{n}\right)\tilde{q}(t)\\ \tilde{q}(t+\Delta t) - \tilde{q}(t) &= \frac{\Delta\theta}{2}\mathbf{n}\tilde{q}(t)\\ \frac{\tilde{q}(t+\Delta t) - \tilde{q}(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\mathbf{n}\tilde{q}(t)\end{aligned}$$

ここで，$\Delta t \to 0$ の極限を取ると，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{q}(t+\Delta t) - \tilde{q}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\mathbf{n}\tilde{q}(t)\\ \frac{d\tilde{q}}{dt} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_b\tilde{q} \qquad (17)\end{aligned}$$

となり，$\tilde{q}(t)$ の時間微分が得られる．これは位置ベクトルが角速度 $\boldsymbol{\omega}_b$[rad/s] で回転するときの四元数の時間変化を表す．

20.2　座標系が回転する場合

位置ベクトルの場合と同様に考えると，座標系が回転する場合の時間微分は

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{1}{2}\tilde{q}\boldsymbol{\omega}_f \qquad (18)$$

となる．これは座標系が角速度 $\boldsymbol{\omega}_f$[rad/s] で回転するときの四元数の時間変化を表す．

21　四元数の時間積分

一般に，飛翔体の運動を考える際には機体座標系の概念を導入することが多い．そのため，角速度の時間積分も四元数における座標系回転として扱えば良いと思うかもしれない．しかし，機体の運動によって実際に回転するのは角速度センサや加速度センサにより測定したベクトル量であるので，飛翔体の姿勢計算における角速度の時間積分は位置ベクトル回転の積分として扱うべきである．そもそも，機体座標系は機体（センサ）に固定されているため，式 (13) の座標系回転とは意味が異なる．

ここでは，3 軸周りの機体角速度 (body angular velocity) を $\boldsymbol{\omega}_b$[rad/s] $= [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ と表記する．

21.1　角速度一定として積分

積分区間における角速度が一定である場合，$\boldsymbol{\omega}_b$ による姿勢変化を表す四元数 $\tilde{q}(\Delta t)$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\Delta t) &= \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}_b}{\|\boldsymbol{\omega}_b\|}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\\ &= \cos\frac{\|\boldsymbol{\omega}_b\|\Delta t}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}_b}{\|\boldsymbol{\omega}_b\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{\omega}_b\|\Delta t}{2}\\ &= \exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_b\right) \qquad (19)\end{aligned}$$

となる．

こうして得られた $\tilde{q}(\Delta t)$ と，一つ前の状態の四元数 $\tilde{q}(t)$ との積をとることで姿勢を更新できる．

$$\tilde{q}(t+\Delta t) = \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)$$

この式では更新結果のノルムが 1 となるため，必ずしも正規化を行う必要はない．また，Δt[s] 間の角速度が一定という条件を満たしていれば，$\boldsymbol{\omega}_b$ と Δt がどれだけ大きくても回転を正しく計算できる．

21.2　近似積分

積分区間 Δt が十分小さい場合には，近似式を用いることで計算量を削減することが出来る．

三角関数の極限より

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\Delta t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_b\right)\\ &= 1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_b\end{aligned}$$

が得られるので，姿勢の更新式は

$$\begin{aligned}\tilde{q}(t+\Delta t) &= \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)\\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_b\right)\tilde{q}(t)\\ &= \tilde{q}(t) + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_b\tilde{q}(t)\end{aligned}$$

となる．この式では計算結果のノルムが 1 にならないため，最後に正規化を行う必要がある．

22　ベクトル移動

位置ベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ の位置に移動させる四元数 $\tilde{q}$ を求める．

最短経路での移動を考える場合，$\tilde{q}$ の回転軸ベクトル $\mathbf{n}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交かつノルムが 1 であるので，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積を正規化して

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

また，軸周りの回転角 θ はスカラー積の幾何学性より

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right)$$

となる．以上より，目的の四元数

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2}$$

が得られ，

$$\mathbf{b} = \tilde{q}\mathbf{a}\tilde{q}^*$$

が成り立つ．

23　四元数の補間

任意の二つの単位四元数を考えたときに，以下に述べる Slerp または Lerp を用いることで両者間を補間することができる．

ここでは，$\tilde{q}_1$ から $\tilde{q}_2$ までの経路を補間する四元数 $\tilde{q}$ を，補間パラメータ $t (0 \leq t \leq 1)$ を用いて $\tilde{q} = \mathrm{slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t)$ や $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \to \tilde{q}_2$ のように表記する．

23.1　球状線形補間 (Slerp: Spherical linear interpolation)

二つの単位四元数 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ があるとき，これらは常に 4 次元空間における半径 1 の超球面上に存在している（$\|\tilde{q}_1\| = \|\tilde{q}_2\| = 1$ であるため）．球状線形補間では，計算結果の $\tilde{q}$ が超球面上を通るように二点間を補間する．

ここで，二つの四元数間の角度を Ω とすると

$$\Omega = \arccos(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2)$$

となり，Slerp のアルゴリズムは以下のように表される．

$$\mathrm{slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) = \frac{\sin(1-t)\Omega}{\sin\Omega}\tilde{q}_1 + \frac{\sin t\Omega}{\sin\Omega}\tilde{q}_2 \tag{20}$$

23.2　線形補間（Lerp: Linear interpolation）

Ω が微小角のときには，$\sin\Omega \approx \Omega$ と近似することで計算量を大幅に減らすことができる．

$$\mathrm{lerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) = (1-t)\tilde{q}_1 + t\tilde{q}_2$$

Slerp では $\tilde{q}$ が超球面上を通るように補間したが，Lerp では直線経路で補間するため，$\tilde{q}$ は殆どの場合超球面上に存在しない．そのため，Lerp を適用した後はノルムが 1 となるように正規化を行う必要がある．

23.3　補間における注意点

四元数の補間を行う際には，同じ回転を表すもう一つの四元数の存在に注意しなければならない．

四元数の符号を反転させると，軸ベクトルの向きが逆かつ軸周りの回転方向も逆となる．つまり，3 次元の回転においては，符号の異なる二つの四元数は全く同じ回転を表すことになる．

しかし，4 次元空間においては原点を挟んで反対側に位置するため，正と負どちらの四元数を選んで補間を行うかによって結果が異なってしまう．具体的には，$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \to \tilde{q}_2$ と $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \to -\tilde{q}_2$ では，どちらか一方が最短経路での補間となり，もう一方は長い経路での補間となる．これは，2 次元上での円の補間において，$\mathrm{a} \to \mathrm{b} (\angle\mathrm{ab} \neq 180°)$ の二点間を，$\angle\mathrm{ab} < 180°$ の経路で補間するか，$\angle\mathrm{ab} > 180°$ の経路で補完するかという問題に似ている．

実際に $\tilde{q}_2$ と $-\tilde{q}_2$ のどちらを用いれば良いかという判断は，$\tilde{q}_1$ と $\tilde{q}_2$ の内積 $(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2)$ を用いて行う．二つの内積の結果が正なら最短経路，負なら長い経路で補間される．

一般には最短経路での補間を行いたいことが多い．$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \to \tilde{q}_2$ として内積の結果が負（長い経路）であった場合には，$\tilde{q}_2$ の符号を反転して $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \to -\tilde{q}_2$ としてから補間を行えば良い．

23.4　補間プログラム例

Slerp アルゴリズムの実装例を以下に示す．あくまでもアルゴリズムの説明を行うことが目的であるため Rust の文法的に正しくない箇所が多々あるが，そこは目を瞑っていただきたい．

プログラム 1　slerp-algorithm.rs

```
fn slerp(q1:Quaternion, q2:Quaternion, t:f64)
    -> Quaternion
{
    // Normalize to avoid undefined behavior.
    let q1 = normalize(q1);
    let mut q2 = normalize(q2);

    let mut dot = dot(q1, q2);
    if dot < 0.0 {
        q2 = -q2;
        dot = -dot;
    }
```

```

    // If the inputs are too close for comfort,
    // linearly interpolate and normalize.
    if dot > 0.9995 {
        return normalize( (1 - t)*q1 + t*q2 );
    }

    let theta = dot.acos();
    let sin_theta = theta.sin();
    let s1 = ((1 - t)*theta).sin() / sin_theta;
    let s2 = (t * theta).sin() / sin_theta;

    //result
    s1 * q1 + s2 * q2
}

// Same as scalar product of 3D vectors.
fn dot(a:Quaternion, b:Quaternion) -> f64 {
    let mut num = 0.0;
    for i in 0..4 {
       num += a[i] * b[i];
    }
    num
}
```

内積の結果が 0.9995 より大きい場合の処理を Lerp で行うことで，逆余弦関数の計算に定義域外の値が入ることを防いでいる．

24 慣性航法への応用

航空機などに搭載される慣性航法装置は，機体上に固定されたセンサを用いて自らの姿勢・速度・位置を算出する．センサにはノイズや誤差が含まれるので，実用に耐えうる精度を出すにはカルマンフィルタ等を適用する必要があるが，ここでは慣性航法計算の特に基礎的な部分について述べる．

まず，センサは機体座標系に固定されているので，慣性座標系上の移動量を計算するためには座標変換を行わなければならない．そのために，機体の姿勢変化に伴う角速度 ω^b を積分して機体姿勢を表す四元数を逐次更新する．

$$\tilde{q}_n = \tilde{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\,\omega_n^b\,\tilde{q}_{n-1}$$

ここで，各記号の下添え字は計算ステップを，上添字は座標系を表し，i なら慣性座標系，b なら機体座標系上の値を意味する．この四元数を用いて機体座標系から慣性座標系への座標変換を行うには

$$\mathbf{a}_n^i = \tilde{q}_n\,\mathbf{a}_n^b\,\tilde{q}_n^*$$

とすれば良い．

あとはデータサンプリング周期 Δt ごとに積分してやれば，慣性座標系上における機体速度 $\mathbf{v}_n^i$ と機体位置 $\mathbf{R}_n^i$ が得られる．

$$\mathbf{v}_n^i = \mathbf{v}_{n-1}^i + (\mathbf{a}_n^i + \mathbf{g}_n^i)\Delta t$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n^i &= \mathbf{R}_{n-1}^i + \int_0^{\Delta t} \mathbf{v}_n^i\,dt \\ &= \mathbf{R}_{n-1}^i + \mathbf{v}_{n-1}^i\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n^i + \mathbf{g}_n^i)\Delta t^2\end{aligned}$$

ただし，$\mathbf{g}_n^i$ は位置 $\mathbf{R}_n^i$ における重力加速度で，Δt ごとに更新される．多くの場合は定数として扱っても問題無いだろうが，厳密には地上でも場所によって重力加速度は異なるし，例えばロケットでは地上から離れることによる重力加速度の変化が無視できないので，逐次変化するものとして扱う．

25　具体的な計算例

問１．位置ベクトル $\mathbf{r} = [2, 2, 0]$ を座標系の y 軸を回転中心として $\pi/2$[rad] 回転させたベクトル $\mathbf{r}'$ を求める．
Ans)

y 軸を表す単位ベクトルは $\mathbf{n} = [0, 1, 0]$ なので，回転を表す四元数は

$$
\begin{aligned}
\tilde{q} &= \cos\frac{\pi/2}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\pi/2}{2} \\
&= \cos\frac{\pi}{4} + [0, 1, 0]\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)
\end{aligned}
$$

となり，共役は

$$
\tilde{q}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)
$$

である．

　よって，回転後の位置ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)(2i + 2j + 0)\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j) \\
&= \frac{1}{2}(1 + j)(2i + 2j)(1 - j) \\
&= \frac{1}{2}(1 + j)(2i - 2ij + 2j - 2j^2) \\
&= \frac{1}{2}(1 + j)(2i - 2k + 2j + 2) \\
&= \frac{1}{2}(2i - 2k + 2j + 2 + 2ji - 2jk + 2j^2 + 2j) \\
&= 2j - 2k
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathbf{r}' = [0, 2, -2]
$$

問２．位置ベクトル $\mathbf{r} = [3, 0, 0]$ を，回転軸 [1, 1, 0] 周りに π[rad] 回転させたベクトル $\mathbf{r}'$ を求める．
Ans)

　回転軸を表す単位ベクトルは

$$
\mathbf{n} = \frac{[1, 1, 0]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]
$$

なので，回転を表す四元数は

$$
\begin{aligned}
\tilde{q} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \cos\frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)
\end{aligned}
$$

となる．また，共役は

$$
\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i - j)
$$

であるので，回転後のベクトル $\mathbf{r}'$ は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)[3, 0, 0]\frac{1}{\sqrt{2}}(-i - j) \\
&= \frac{1}{2}(i + j)3i(-i - j) \\
&= \frac{1}{2}(i + j)(-3i^2 + -3ij) \\
&= \frac{1}{2}(i + j)(3 - 3k) \\
&= \frac{1}{2}(3i - 3ik + 3j - 3jk) \\
&= 3j
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathbf{r}' = [0, 3, 0]
$$

26　あとがき

　本資料は著者が必要と感じた内容を列挙するに留めたが，四元数の世界はこの 9 ページの資料には到底収まらない広がりを持っている．四元数について詳しく知りたい読者は，ぜひ参考文献に目を通して頂きたい．特に [1] はハミルトンの生涯から四元数の応用まで幅広く書かれている．表記法が独特なので入門としては少しハードルが高いかもしれないが，個人的にはこの表記法に慣れてしまったほうが式展開しやすいのではないかと思っている．また，[2] はオイラー角や方向余弦行列との関係についても書かれており，実用的である．

参考文献

[1] 堀 源一郎：ハミルトンと四元数，海鳴社（2007）
[2] Jack B. Kuipers: Quaternions and rotation sequences,
Princeton Univercity Press(1999)
[3] 矢野 忠：四元数の発見，海鳴社（2014）

[4] Yan-Bin Jia: Quaternions*
[5] Michael Boyle: The integration of angular velocity
[6] 矢田部 学：クォータニオン計算便利ノート，MSS 技報，Vol.18
[7] Wikipedia: Quaternion (https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion)
[8] Wikipedia: Slerp (https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp)
[9] 中田 亨：四元数で三次元回転 (http://www015.upp.so-net.ne.jp/notgeld/quaternion.html)
[10] 加藤寛一郎・大屋昭男・柄沢研治：航空機力学入門，東京大学出版（2015）
[11] Wikipedia: Versor (https://en.wikipedia.org/wiki/Versor)
[12] Cibelle Celestino Silva and Roberto de Andrade Martins: Polar and axial vectors versus quaternions (2002)
[13] 大坪孔治・小口美津夫：慣性誘導システム，計測と制御 Vol. 23, No. 1（昭和 59 年 1 月）