四元数まとめ資料

宇宙電波実験室 (space-denpa.jp)

2021 年 9 月 23 日

1 まえがき

四元数 (Quaternion) は 1843 年にアイルランドの数学者 William Rowan Hamilton(1805-1865) によって発見された [1].

本資料は，主に飛翔体の姿勢計算を行う事を目的として，四元数の基本的な演算についてまとめる．工学的な応用を前提に書いているので，必ずしも数学的に厳密な表現ではないことに注意されたい．

2 座標系の定義

本資料では，以下の２つの座標系を取り扱う．

- 基準座標系 (Reference frame)
- 機体座標系 (Body frame)

基準座標系は，移動や回転の基準となる座標系である．機体座標系は，原点が航空機等の重心位置に固定され，機体とともに移動・回転する動座標系である [2]．また，両座標系ともに上向きを正とした右手直交座標系とする．

3 記号

本資料中で使用する記号についてまとめる．

3.1 四元数（$\mathbb{H}$）

本資料では，上にチルダを付けて

$$\tilde{q} \tag{1}$$

のように表す．

3.2 ベクトル（$\mathbb{R}^3$）

ベクトルはボールド体とし，その成分を下添え字 1,2,3 で表す．また，式中に四元数とベクトルが混在するため，ベクトルの括弧を角括弧として区別する．

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \tag{2}$$

3.3 内積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積はドットで表す．

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{3}$$

3.4 外積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積はクロスで表す．

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1] \tag{4}$$

4 四元数の定義

スカラー部を q_0，ベクトル部を $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ として，四元数の成分を

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (q_0, [q_1, q_2, q_3]) && (5) \\ &= q_0 + \mathbf{q} && (6) \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k && (7) \end{aligned}$$

のように表す．ここで，$1, i, j, k$ は四元数の基底と呼ばれ，以下の性質を満たす．

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{8}$$

上式より基底間の積の組み合わせを導出することができ，一例として $-1 = ijk$ の両辺に右から k を掛ければ

$$\begin{aligned} -k &= ijkk = ij(-1) \\ k &= ij \end{aligned} \tag{9}$$

を得る．他の積も同じように得られて，結局

$$\left. \begin{aligned} ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

が可能な全ての積を列挙したものとなる．また，以上からわかるように基底間の積は非可換である．

5 加法・減法

四元数の加法と減法は，基底ごとに括って計算すれば良い．

$$\begin{aligned}\tilde{q} \pm \tilde{p} &= q_0 \pm p_0 + \mathbf{q} \pm \mathbf{p} && (11)\\ &= q_0 \pm p_0 + (q_1 \pm p_1)i + (q_2 \pm p_2)j \\ &\qquad + (q_3 \pm p_3)k && (12)\end{aligned}$$

6 ハミルトン積

ハミルトン積とは四元数同士の積のことである．

この積は非可換であるが，結合法則を満たす．つまり，任意の四元数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ に関して

$$\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = (\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c}) \tag{13}$$

が成り立つ．また，ノルムは乗法的であり

$$\|\tilde{a}\tilde{b}\| = \|\tilde{a}\|\|\tilde{b}\| \tag{14}$$

となる．

二つの四元数 $\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ のハミルトン積は，基底間の積の性質と分配法則に従って以下のように導出できる．

まず，分配法則に従って単純に展開すると

$$\begin{aligned}\tilde{q}\tilde{p} &= (q_0 + \mathbf{q})(p_0 + \mathbf{p}) && (15)\\ &= q_0 p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q}\mathbf{p} && (16)\\ &= q_0 p_0 \\ &\quad + (q_0 p_1 i + q_0 p_2 j + q_0 p_3 k) \\ &\quad + (p_0 q_1 i + p_0 q_2 j + p_0 q_3 k) \\ &\quad + (q_1 p_1 i^2 + q_1 p_2 ij + q_1 p_3 ik + q_2 p_1 ji + q_2 p_2 j^2 \\ &\qquad + q_2 p_3 jk + q_3 p_1 ki + q_3 p_2 kj + q_3 p_3 k^2) && (17)\end{aligned}$$

となる．これを式 (8) の規則に従って整理すると

$$\begin{aligned}\tilde{q}\tilde{p} = &(q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) \\ &+ (q_0 p_1 + p_0 q_1 + q_2 p_3 - q_3 p_2)i \\ &+ (q_0 p_2 + p_0 q_2 - q_1 p_3 + q_3 p_1)j \\ &+ (q_0 p_3 + p_0 q_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1)k\end{aligned} \tag{18}$$

となり，$\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ のハミルトン積が得られる．

また，上式を注意深く観察すると，ベクトル部同士の積に関して以下の関係が成り立っていることが確認できる．

$$\mathbf{q}\mathbf{p} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{19}$$

これこそがハミルトンの探し求めていたベクトルの乗算法則であり，3 次元ベクトルの内積と外積はここから定義された [3]．式 (19) の関係を用いて式 (18) を書き直すと

$$\tilde{q}\tilde{p} = q_0 p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{20}$$

となり，ハミルトン積を簡潔に表せるようになる．内積と外積の性質は広く知られているので，この形で書いた方が扱いやすい．

以上より，四元数同士の積の結果は四元数となることがわかった．式 (19) ではベクトル部同士の積の結果も四元数となっているが，四元数のベクトル部は後述する純虚四元数とみなせるので，これも四元数同士の積である．また，除法に関しては後述する逆四元数を掛けることで計算できるので [4]，四元数は四則について閉じているといえる．

7 ハミルトン積が可換になる場合

6 章においてハミルトン積は非可換であると述べた．導出からわかるようにこれは事実であるが，特定の条件では可換となることがある．

これは式 (20) を見れば明らかであるが，ハミルトン積が非可換なのは式中に外積の項が含まれているためである．つまり，二つの四元数 $\tilde{a} = a_0 + \mathbf{a}$，$\tilde{b} = b_0 + \mathbf{b}$ において

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \tag{21}$$

であれば，これらの積は可換となる．

8 共役四元数

四元数 $\tilde{q} = q_0 + \mathbf{q}$ のベクトル部の符号を反転したものを共役四元数といい，アスタリスクを付けて以下のように定義する．

$$\tilde{q}^* \equiv q_0 - \mathbf{q} \tag{22}$$

この定義より

$$\tilde{q}^* + \tilde{p}^* = (\tilde{q} + \tilde{p})^* \tag{23}$$

が成り立つことは明らかであり，また，積に関して以下の関係が成り立つ．

$$\tilde{q}^*\tilde{p}^* = (\tilde{p}\tilde{q})^* \tag{24}$$

これは n 個の四元数の積に一般化できて，

$$\tilde{q}_1^*\tilde{q}_2^*\tilde{q}_3^* \dots \tilde{q}_n^* = (\tilde{q}_n \dots \tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* \tag{25}$$

が成り立つ．

9 ノルム

共役四元数を用いると，ノルムを定義できる．

$$\|\tilde{q}\| \equiv \sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*} = \sqrt{\tilde{q}^*\tilde{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{26}$$

10　単位四元数

単位四元数とは，ノルムが 1 の四元数のことである．零でない四元数 $\tilde{q}$ をそのノルムで割ると，単位四元数

$$U_{\tilde{q}} = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} \tag{27}$$

が得られ，この処理を四元数の正規化という．

また，後述する回転を表す単位四元数のことを Versor（ベルソル，ベルサー）と呼ぶことがある．ラテン語で「回転する」を表す Versare に由来する単語とされており，ハミルトンによって四元数の表現に導入された [5].

11　逆四元数

共役四元数とノルムを用いることで，逆四元数 $\tilde{q}^{-1}$ を定義できる．

$$\tilde{q}^{-1} \equiv \frac{\tilde{q}^*}{\|\tilde{q}\|^2} \tag{28}$$

この定義と式 (26) より $\tilde{q}^{-1}\tilde{q} = \tilde{q}\tilde{q}^{-1} = 1$ となることが確認でき，単位四元数の場合には共役が逆四元数となる．

また，複数の逆四元数の積に関して以下が成り立つ．

$$\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-1}\tilde{q}_3^{-1} \ldots \tilde{q}_n^{-1} = (\tilde{q}_n \ldots \tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^{-1} \tag{29}$$

これは，共役四元数の積の性質と，ハミルトン積のノルムが乗法的であることより確認できる．

12　純虚四元数 (Pure Quaternion)

スカラー部が 0 であり，ベクトル部の少なくとも一つの要素が 0 ではない四元数を純虚四元数という．

$$\tilde{q} = (0, [q_1, q_2, q_3]) \tag{30}$$

13　実四元数 (Real Quaternion)

スカラー部が 0 ではなく，ベクトル部の要素が全て 0 である四元数を実四元数という．

$$\tilde{q} = (q_0, [0, 0, 0]) \tag{31}$$

14　回転を表す四元数 (Versor)

3 次元空間における物体の回転は，回転軸とその周りの回転角によって表すことが出来る（これをオイラーの定理という）．ここで，回転軸を表す単位ベクトル $\mathbf{n}$ と，その周りの回転角 θ を用いて以下の四元数を考える．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2} \quad (-2\pi \leq \theta \leq 2\pi) \tag{32}$$

この式を用いることで，3 次元空間の回転と四元数を結びつけることができる．初期状態の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ として，(i) 座標系を固定して位置ベクトルを回転させる場合と，(ii) 位置ベクトルを固定して座標系を回転させる場合の式を以下に示す [6].

$$\text{(i)} \quad \mathbf{r}_{\mathrm{i}} = \tilde{q}\,\mathbf{r}\,\tilde{q}^{-1} \qquad \text{（位置ベクトル回転）} \tag{33}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{r}_{\mathrm{ii}} = \tilde{q}^{-1}\,\mathbf{r}\,\tilde{q} \qquad \text{（座標系回転）} \tag{34}$$

上の二つの式は展開して整理するとスカラー部が消えるため，左辺がベクトル部のみ（純虚四元数）となっている．

(i) と (ii) の違いは直感的にはわかりにくいかもしれないが，これらは互いに逆回転を表している．試しに，位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して (i) と (ii) の両方を適用してみると

$$\mathbf{r}_{\mathrm{i\ and\ ii}} = \tilde{q}^{-1}(\tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^{-1})\tilde{q} \tag{35}$$

$$= (\tilde{q}^{-1}\tilde{q})\mathbf{r}(\tilde{q}^{-1}\tilde{q}) \tag{36}$$

$$= \mathbf{r} \tag{37}$$

となり，互いに逆回転を表すので回転が打ち消されていることが分かる．

Versor の場合には $\tilde{q}^{-1} = \tilde{q}^*$ となるので，これ以降の回転変換は見やすさのために共役で表記する．

15　回転の合成

ここでは，複数の四元数による回転を合成する（ひとつの回転にまとめる）ことが出来ないかを考える．

15.1　位置ベクトル回転

位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して，$\tilde{q}_1$ による位置ベクトル回転を行う．ここで，変化後の位置ベクトルを $\mathbf{r}_{\tilde{q}_1}$ のように添え字で表すと，式 (33) より

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1} = \tilde{q}_1\mathbf{r}\tilde{q}_1^* \tag{38}$$

となる．さらに，$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1}$ に対して $\tilde{q}_2$ による位置ベクトル回転を行うと以下のようになる．

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2} = \tilde{q}_2\mathbf{r}_{\tilde{q}_1}\tilde{q}_2^* \tag{39}$$

$$= \tilde{q}_2(\tilde{q}_1\mathbf{r}\tilde{q}_1^*)\tilde{q}_2^* \tag{40}$$

ここで，式 (25) の性質と結合法則より，上式は

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2} = (\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\mathbf{r}(\tilde{q}_1^*\tilde{q}_2^*) \tag{41}$$

$$= (\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\mathbf{r}(\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* \tag{42}$$

と変形でき，一般化すると以下のようになる．

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3...} = (...\tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)\mathbf{r}(...\tilde{q}_3\tilde{q}_2\tilde{q}_1)^* \tag{43}$$

つまり，四元数同士の積は回転の合成となっており，複数の回転を一つの四元数で表すことが出来る．

例えば，計算ステップ n において四元数 $\tilde{q}_n$ があり，その後 1 ステップの間に $\Delta\tilde{q}$ だけ変化したとすると，計算ステップ $n+1$ における四元数は，

$$\tilde{q}_{n+1} = \Delta\tilde{q}\,\tilde{q}_n \tag{44}$$

となる．

15.2 座標系回転

位置ベクトル回転の場合と同様に考える．位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して $\tilde{q}_1$，$\tilde{q}_2$，$\tilde{q}_3$... による座標系回転を行うと

$$\mathbf{r}_{\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3} = (\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3...)^*\mathbf{r}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3...) \tag{45}$$

となり，計算ステップ n に対しては以下のようになる．

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n\,\Delta\tilde{q} \tag{46}$$

以上のように，回転の合成とは共役四元数の積の性質を用いて式 (33) と式 (34) から導かれるものであり，後に適用する回転が二種類の回転のうちどちらなのかによって合成する際の積の順序が変化する．仮に，$\Delta\tilde{q}\,\tilde{q}_n$ の順序で合成した後に $\tilde{q}^*\mathbf{r}\tilde{q}$ の回転を適用すると，回転順序が逆かつそれぞれの回転方向も逆となり，一般的に期待される結果は得られない．このことは式 (25) から確認できる．

16 恒等四元数 (Identity Quaternion)

式 (32) より，軸回りの回転角 θ が 0 のときには

$$\tilde{q} = (1, [0, 0, 0]) \tag{47}$$

が得られ，この四元数による回転は恒等写像となる（回転を与えない）ことから，恒等四元数と呼ばれる．例えば，飛翔体の初期姿勢を表す際には恒等四元数を用いることがある．

17 指数函数

任意の四元数 $\tilde{q} = q_0 + \mathbf{q}$ に関して，ネイピア数 e ($= 2.71828...$) の四元数乗冪は

$$\begin{aligned}
\exp(\tilde{q}) &= \exp(q_0 + \mathbf{q}) && (48)\\
&= \exp(q_0)\exp(\mathbf{q}) && (49)\\
&= e^{q_0}\left(\cos\|\mathbf{q}\| + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\sin\|\mathbf{q}\|\right) && (50)
\end{aligned}$$

である．

18 対数函数

任意の四元数 $\tilde{q} = q_0 + \mathbf{q}$ に関して，対数函数 $\ln(\tilde{q})$ は指数函数 $\exp(\tilde{q})$ の逆函数であり，

$$\ln(\tilde{q}) = \ln\|\tilde{q}\| + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\arccos\frac{q_0}{\|\tilde{q}\|} \tag{51}$$

として与えられる．

19 冪函数

任意の四元数 $\tilde{q} = \|\tilde{q}\|(\cos\Omega + \mathbf{n}\sin\Omega)$ に関して，底 $\tilde{q}$ および冪指数 t を持つ冪は，

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^t &= \|\tilde{q}\|^t\exp(\mathbf{n}\,t\Omega) && (52)\\
&= \|\tilde{q}\|^t\{\cos(t\Omega) + \mathbf{n}\sin(t\Omega)\} && (53)
\end{aligned}$$

である．

20 Versor から回転角と回転軸を取り出す

Versor は式 (32) のように書かれるので，$\tilde{q}$ の回転角 θ はスカラー部を比較して以下のように求まる．

$$\theta = 2\arccos q_0 \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{54}$$

もしくは，正接の定義より

$$\theta = 2\arctan\frac{\|\mathbf{q}\|}{q_0} \quad (-\pi < \theta < \pi) \tag{55}$$

のように求めることもできる．しかし，この式ではゼロ除算が発生してしまうので，それが気になるのであれば以下の式を使うと良いだろう．

$$\theta = \begin{cases} +2\arcsin\|\mathbf{q}\| & (q_0 \ge 0)\\ -2\arcsin\|\mathbf{q}\| & (q_0 < 0)\end{cases} \tag{56}$$

上式における θ の範囲は $-\pi < \theta \le \pi$ である．

回転軸を求める際は，単にベクトル部を正規化して

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} && (57)\\
&= \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - q_0^2}} \quad (\because \|\tilde{q}\| = 1) && (58)
\end{aligned}$$

とすれば良い．

21 ベクトル移動

位置ベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ の位置に移動（回転）させる四元数を求める．これは $\mathbf{b} = \tilde{q}\mathbf{a}\tilde{q}^*$ を満たす $\tilde{q}$ を求める問題である．

最短経路での移動を考える場合，$\tilde{q}$ の回転軸ベクトル $\mathbf{n}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交かつノルムが 1 であるので，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積を正規化して

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \tag{59}$$

となる．また，軸周りの回転角 θ は内積の幾何学性より

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right) \tag{60}$$

であるので，目的の四元数 $\tilde{q}$ が以下のように得られる．

$$\tilde{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{61}$$

22　四元数の補間

任意の二つの単位四元数を考えたときに，以下に述べる Slerp または Lerp を用いることで両者間を補間することができる．

ここでは，$\tilde{q}_1$ から $\tilde{q}_2$ までの経路を補間する四元数 $\tilde{q}$ を，補間パラメータ $t \in [0, 1]$ を用いて $\tilde{q} = \mathrm{slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t)$ や $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ のように表記する．

22.1　球状線形補間 (Slerp: Spherical linear interpolation)

二つの単位四元数 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ があるとき，これらは常に 4 次元空間における半径 1 の超球面上に存在している（$\|\tilde{q}_1\| = \|\tilde{q}_2\| = 1$ であるため）．球状線形補間では，$\tilde{q}$ が超球面上を通るように補間を行い，t を一定の割合で変化させた際に角速度が一定となる [7].

ここで，二つの四元数間の角度を Ω とすると

$$\Omega = \arccos(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2) \tag{62}$$

となり，Slerp のアルゴリズムは以下のように表される．

$$\mathrm{slerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) = \frac{\sin(1-t)\Omega}{\sin\Omega}\tilde{q}_1 + \frac{\sin t\Omega}{\sin\Omega}\tilde{q}_2 \tag{63}$$

22.2　線形補間（Lerp: Linear interpolation）

Ω が微小角のときには，$\sin\Omega \approx \Omega$ と近似することで計算量を大幅に減らすことができる．

$$\mathrm{lerp}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2; t) = (1-t)\tilde{q}_1 + t\tilde{q}_2 \tag{64}$$

Slerp では $\tilde{q}$ が超球面上を通るように補間したが，Lerp では直線経路で補間するため，$\tilde{q}$ は殆どの場合超球面上に存在しない．そのため，Lerp を適用した後は正規化を行う必要がある．また，Lerp の場合には t を一定の割合で変化させても角速度が一定とならない [7].

22.3　補間における注意点

四元数の補間を行う際には，同じ回転を表すもう一つの四元数の存在に注意しなければならない．四元数の符号を反転させると，軸ベクトルの向きが逆かつ軸周りの回転方向が逆となる．つまり, 3 次元空間においては, 符号の異なる二つの四元数（$\tilde{q}$ と $-\tilde{q}$）は全く同じ回転を表すことになる．しかし, 4 次元空間においてはそれぞれ異なる位置に存在するため，正と負どちらの四元数を選んで補間を行うかによって結果が異なってしまう．具体的には，$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ と $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} -\tilde{q}_2$ では，どちらか一方が最短経路での補間となり，もう一方は長い経路での補間となる．これは，2 次元上での円の補間において，$\mathrm{a} \xrightarrow{t} \mathrm{b}(\angle\mathrm{ab} \neq 180^\circ)$ の二点間を，$\angle\mathrm{ab} < 180^\circ$ の経路で補間するか，$\angle\mathrm{ab} > 180^\circ$ の経路で補完するかという問題に似ている．

実際に $\tilde{q}_2$ と $-\tilde{q}_2$ のどちらを用いれば良いかという判断は，$\tilde{q}_1$ と $\tilde{q}_2$ の内積 $(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2)$ を用いて行う．二つの内積の結果が正なら最短経路，負なら長い経路で補間される．一般には最短経路での補間を行いたいことが多いので，$\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} \tilde{q}_2$ で計算しようとして内積の結果が負（長い経路）であった場合には，$\tilde{q}_2$ の符号を反転して $\tilde{q} : \tilde{q}_1 \xrightarrow{t} -\tilde{q}_2$ とすれば良い．

22.4　補間プログラム例

Slerp アルゴリズムの実装例を以下に示す．あくまでもアルゴリズムの説明を行うことが目的であるため Rust の文法的に正しくない箇所が多々あるが，そこは目を瞑っていただきたい．

プログラム 1　slerp-algorithm.rs

```
fn slerp(q1:Quaternion, mut q2:Quaternion, t:f64)
    -> Quaternion
{
    let mut dot = dot(q1, q2);
    if dot < 0.0 {
        q2 = -q2;
        dot = -dot;
    }

    if dot > 0.9995 {
        return normalize( (1 - t)*q1 + t*q2 );
    }

    let theta = dot.acos();
    let sin_theta = theta.sin();
    let s1 = ((1 - t)*theta).sin() / sin_theta;
    let s2 = (t * theta).sin() / sin_theta;
```

```

    //result
    s1 * q1 + s2 * q2
}

// Same as scalar product of 3D vectors.
fn dot(a:Quaternion, b:Quaternion) -> f64 {
    let mut num = 0.0;
    for i in 0..4 {
        num += a[i] * b[i];
    }
    num
}
```

基本的には Slerp の式をそのまま実装しただけだが，内積の値が 0.9995 より大きい場合の処理を Lerp で行うことで逆余弦関数に定義域外の値が入ることを防いでいる．

23 角速度の積分

飛翔体の姿勢は，機体上のセンサにより計測した角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ [rad/s] を積分することで求められる．初期状態において基準座標系と機体座標系が一致しているものとすると，任意の時刻までの角速度を積分して得られた四元数 $\tilde{q}$ はその時点における基準座標系から機体座標系までの回転量を表し，これを姿勢と呼ぶ．

そもそも姿勢を計算して何が出来るかというと，飛翔体の挙動を把握出来るというのは当然として，姿勢が分かれば値の座標変換ができる．例えば，機体座標系で計測した加速度を基準座標系に持っていけば基準座標系上における機体の移動量を計算できる．具体的には，14 章で示した二つの回転の式は以下のような意味を持つ．

$$\mathbf{r}_{\mathrm{r}} = \tilde{q}\,\mathbf{r}_{\mathrm{b}}\,\tilde{q}^* \qquad (\mathrm{Body} \to \mathrm{Ref}) \tag{65}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{b}} = \tilde{q}^*\,\mathbf{r}_{\mathrm{r}}\,\tilde{q} \qquad (\mathrm{Ref} \to \mathrm{Body}) \tag{66}$$

ただし，Body → Ref は機体座標系から基準座標系への座標変換を表し，Ref → Body はその逆を表す．このような意味を持つことは，２次元で考えた場合の図を紙にでも描いてみればわかるだろう．

23.1 角速度一定として積分

積分区間 Δt [s] における角速度が一定である場合を考える．機体が $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ で回転する場合，回転軸は $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ そのものであり，軸回りの回転角は $\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\| \times \Delta t$ となる．つまり，Δt 間における姿勢変化を表す四元数 $\Delta\tilde{q}$ は,

$$\Delta\tilde{q} = \cos\frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\|\Delta t}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}}{\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\|\Delta t}{2} \tag{67}$$

$$= \exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\right) \tag{68}$$

となる．こうして得られた $\Delta\tilde{q}$ と，現時点における姿勢を表す四元数 $\tilde{q}_n$ との積をとることで姿勢を更新できる．

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n \Delta\tilde{q} \tag{69}$$

これは座標系回転の場合の合成順序であるが，この順序とする理由については後述する．

23.2 近似積分

積分区間 Δt が十分小さい場合には，近似式を用いることで計算量を削減することが出来る．三角関数の極限より

$$\Delta\tilde{q} = \lim_{\Delta t \to 0}\exp\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\right) \tag{70}$$

$$= 1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}} \tag{71}$$

が得られるので，姿勢の更新式は

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n \Delta\tilde{q} \tag{72}$$

$$= \tilde{q}_n\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\right) \tag{73}$$

$$= \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}\tilde{q}_n\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}} \tag{74}$$

となる．

23.3 角速度の積分における合成順序について

姿勢の更新を行う際に合成順序を式 (69) としたが，なぜこの順序となるのだろうか．

角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ は機体上のセンサにより計測しているので，当然ながら機体座標系上における値である．仮に位置ベクトル回転の順序で積分してみると

$$\tilde{q}_{n+1} = \Delta\tilde{q}\,\tilde{q}_n \tag{75}$$

$$= \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\tilde{q}_n \tag{76}$$

となるが, これでは Body-frame の値をそのまま Ref-frame に持ってきた状態なので，Ref-frame の各軸に対する回転を行うことになってしまう．そこで，以下のような座標変換を行ってから積分する．

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}} = \tilde{q}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\tilde{q}^* \quad (\mathrm{Body} \to \mathrm{Ref}) \tag{77}$$

この値を用いて積分すると，

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}\tilde{q}_n \tag{78}$$

$$= \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{q}_n\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\,\tilde{q}_n^*)\tilde{q}_n \tag{79}$$

$$= \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}\tilde{q}_n\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}} \quad (\because \|\tilde{q}_n\| = 1) \tag{80}$$

となり，座標変換を行うことで式 (74) と同じ式が得られた．以上から分かるように，積分を行う際の合成順序が式 (69) のようになっているのは，角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ の座標系を考慮したためである．

因みに，15 章において回転の合成順序と適応（ここでいう座標変換）はそれぞれ対応していると述べたが，機体の姿勢を表す四元数はひとつしか存在せず（正確には $\tilde{q}$ と $-\tilde{q}$ の二つが存在するが，座標変換の際に符号は打ち消し合うので気にしなくて良い），座標変換はどちらの方向でも行うことができる．簡単な式変形で式 (65) と式 (66) を行き来出来ることがわかるだろう．

結局，Body → Ref の変換を表す四元数とか，Ref → Body の変換を表す四元数とか，そのような区別は存在せず，四元数はただ機体の姿勢を表すだけである．

24 慣性航法への応用

航空機などに搭載される慣性航法装置は，機体上に固定されたセンサを用いて自らの姿勢・速度・位置を算出する．センサにはノイズや誤差が含まれるので実用に耐えうる精度を出すにはカルマンフィルタ等を適用する必要があるが，ここでは慣性航法計算の特に基礎的な部分について述べる．

まず，センサは機体座標系に固定されているので，基準座標系（慣性座標系）上の移動量を計算するためには座標変換を行わなければならない．そのために，機体の姿勢変化に伴う角速度 ω^b を積分して機体姿勢を表す四元数を逐次更新する．

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n + \frac{\Delta t}{2}\,\tilde{q}_n\,\omega_n^b \tag{81}$$

ここで，各変数の下添え字は計算ステップを，上添字は座標系を表し，r なら基準座標系，b なら機体座標系を意味する．この四元数を用いて機体座標系から基準座標系への座標変換を行うには

$$\mathbf{a}_n^r = \tilde{q}_n\,\mathbf{a}_n^b\,\tilde{q}_n^* \tag{82}$$

とすれば良い．

あとはデータサンプリング周期 Δt ごとに積分していくことで，基準座標系上における機体速度 $\mathbf{v}_n^r$ と機体位置 $\mathbf{R}_n^r$ が得られる [8]．

$$\mathbf{v}_n^r = \mathbf{v}_{n-1}^r + (\mathbf{a}_n^r + \mathbf{g}_n^r)\Delta t \tag{83}$$

$$\mathbf{R}_n^r = \mathbf{R}_{n-1}^r + \int_0^{\Delta t} \mathbf{v}_n^r\,dt \tag{84}$$

$$= \mathbf{R}_{n-1}^r + \mathbf{v}_{n-1}^r\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n^r + \mathbf{g}_n^r)\Delta t^2 \tag{85}$$

ただし，$\mathbf{g}_n^r$ は位置 $\mathbf{R}_n^r$ における重力加速度で，Δt ごとに更新される．多くの場合は定数として扱っても問題無いだろうが，厳密には地上でも場所によって重力加速度は異なるし，例えばロケットでは地上から離れることによる重力加速度の変化が無視できないので，逐次変化するものとして扱う．

25 具体的な計算例

問１．位置ベクトル $\mathbf{r} = [2, 2, 0]$ を座標系の y 軸を回転中心として $\pi/2$[rad] 回転させたベクトル $\mathbf{r}'$ を求める．

Ans)

y 軸を表す単位ベクトルは $\mathbf{n} = [0, 1, 0]$ なので，回転を表す四元数は

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= \cos\frac{\pi/2}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\pi/2}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} + [0, 1, 0]\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)\end{aligned}$$

となり，共役は

$$\tilde{q}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$$

である．

よって，回転後の位置ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)(2i+2j+0)\frac{1}{\sqrt{2}}(1-j) \\
&= \frac{1}{2}(1+j)(2i+2j)(1-j) \\
&= \frac{1}{2}(1+j)(2i-2ij+2j-2j^2) \\
&= \frac{1}{2}(1+j)(2i-2k+2j+2) \\
&= \frac{1}{2}(2i-2k+2j+2+2ji-2jk+2j^2+2j) \\
&= 2j-2k
\end{aligned}
$$

$$\therefore \mathbf{r}' = [0, 2, -2]$$

問２．位置ベクトル $\mathbf{r} = [3,0,0]$ を，回転軸 [1, 1, 0] 周りに π[rad] 回転させたベクトル $\mathbf{r}'$ を求める．

Ans)

回転軸を表す単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{[1,1,0]}{\sqrt{1^2+1^2+0}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$$

なので，回転を表す四元数は

$$
\begin{aligned}
\tilde{q} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\pi}{2} \\
&= 0 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)
\end{aligned}
$$

となる．また，共役は

$$\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i-j)$$

であるので，回転後のベクトル $\mathbf{r}'$ は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \tilde{q}\mathbf{r}\tilde{q}^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)[3,0,0]\frac{1}{\sqrt{2}}(-i-j) \\
&= \frac{1}{2}(i+j)3i(-i-j) \\
&= \frac{1}{2}(i+j)(-3i^2+-3ij) \\
&= \frac{1}{2}(i+j)(3-3k) \\
&= \frac{1}{2}(3i-3ik+3j-3jk) \\
&= 3j
\end{aligned}
$$

$$\therefore \mathbf{r}' = [0, 3, 0]$$

26　あとがき

本資料は著者が必要と感じた内容を列挙するに留めたが，四元数の世界はこの資料には到底収まらない広がりを持っている．四元数について詳しく知りたい読者は，ぜひ参考文献に目を通して頂きたい．特に文献 [1] はハミルトンの生涯から四元数の応用まで幅広く書かれている．表記法が独特なので入門としては少しハードルが高いかもしれないが，個人的にはこの表記法に慣れてしまったほうが式展開しやすいのではないかと思っている．また，文献 [6] はオイラー角や方向余弦行列との関係について書かれており，実用的である．

参考文献

[1] 堀 源一郎，“ハミルトンと四元数”，海鳴社，2007，pp.8-9.

[2] 加藤寛一郎，大屋昭男，柄沢研治，“航空機力学入門”，東京大学出版，2015，p.2.

[3] Cibelle Celestino Silva，Roberto de Andrade Martins，“Polar and axial vectors versus quaternions”，*American Association of Physics Teachers*，2002.

[4] 矢野 忠，“四元数の発見”，海鳴社，2014，pp.25-26.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Versor

[6] Jack B. Kuipers, “Quaternions and rotation sequences”, *Princeton Univercity Press*, 1999, pp.132-134.

[7] Erik B. Dam, Martin Koch, Martin Lillholm, “Quaternions, Interpolation and Animation”, Technical Report DIKU-TR-98/5 Department of Computer Science University of Copenhagen Universitetsparken 1 DK-2100 Kbh Ø Denmark，1998, pp.40-48.

[8] 大坪孔治，小口美津夫，“慣性誘導システム”，計測と制御，Vol.23，No.1，1984.